



DELHI UNIVERSITY
LIBRARY

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. *B2*

168423

Ac. No. *2491*

Date of release for loan

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of 0.5 nP will be charged for each day the book is kept overtime.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تفرقی مساواتیں

ایڈورڈ کے مکمل احصا کے آخری پانچ بابوں کا اردو ترجمہ

از

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر ریاضیات، کالج جامعہ عثمانیہ
حیدر آباد دکن

جلد ۱-۲

۱۳۴۱ھ ۱۳۴۲ھ ۱۹۲۳ء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

یہ کتاب سرس میکملن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

مضامین

تفرقی مساواتیں

صفحہ	مضمون
۱	باب اول - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں
۶	تفرقی مساوات کی تشکیل -
۷	تغیر جدائی پذیر
۱۴	خطی مساواتیں
۲۶	باب دوم - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں (مسل)
۲۶	تجانس مساواتیں
۲۶	ایک حرف غائب
۳۲	کلیروی صورت
۳۴	باب سوم، رتبہ دوم کی مساواتیں، ٹھیک تفرقی مساواتیں
۳۴	خطی مساواتیں
۳۶	ایک حرف غائب
۳۹	خطی مساوات کی عام سے عام صورت، کسی ایک رقم کا
	نکال دینا -
	ٹھیک تفرقی مساواتیں

اس طرح کی مساوات

ف (لا، ما، ا) = (۱)
جس میں متعامل کی شکل معلوم ہے منحنیات کے ایک خاص قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اس قبیل کے کسی ایک رکن کے لئے ا کی ایک خاص قیمت ہے جو ایک ہی منحنی کے تمام نقاط کے لئے وہی رہتی ہے لیکن اس قبیل کے مختلف منحنیات کے لئے مختلف ہے۔

علم ریاضی میں ایسے سوالات اکثر واقع ہوتے ہیں جن میں منحنیات کے پورے قبیل پر باقی تمام عمل کرنا مقصود ہوتا ہے۔

مثلاً ایک سوال یہ ہے، منحنیات کا ایک ایسا قبیل معلوم کرو جس کا ہر ایک رکن ایک معلوم قبیل کے ہر ایک رکن کو ایک زاویہ معلومہ (مثلاً زاویہ قائمہ) پر قطع کرے۔ ظاہر ہے کہ اس طرح کے عملوں میں منحنی کو مخصوص کرنے والا حرف ا تفاعیل زیر بحث میں بطور ایک مستقل متعارف واقع نہیں ہونا چاہئے درجہ پورے قبیل پر ایک ہی عمل کرنے کی بجائے ہم اس قبیل کے ایک خاص رکن پر عمل کر رہے ہونگے۔ ا اس طرح ساقط ہو سکتا ہے۔

مساوات کو ا کے لئے حل کرو اور اسے شکل ذیل میں لکھو

ف (لا، ما، ا) = (۲)

بجائے لا کے تفریق کرنے سے ا نکل جاتا ہے اور (۱) کی بجائے ایک مساوات لا، ما اور م میں حاصل ہوتی ہے۔
یہ ممکن ہے کہ تفرقی مساوات کے بنائے میں ا کے لئے مساوات حل نہ ہو سکے۔ اس صورت میں

مساوات ف (لا، ما، ا) = (۱)

کا بجائے لا کے تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{جف ف لا} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} \times \frac{\text{فر م}}{\text{فر لا}} = \dots\dots\dots (۳)$$

اب مساواتوں (۱) اور (۳) سے $\frac{لا}{لا}$ کو سا قہ کرنے سے ایک ربط
 $\frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما}$ میں حاصل ہوتا ہے جو سارے قبیل کے لئے درست ہے۔
 مثال کے طور پر خطوط مستقیم کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوات

میں اختیاری مستقل $\frac{ما}{ما} = \frac{م}{م}$ کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{ما}{لا} = \frac{م}{لا}$$

$$\frac{لا - ما}{لا} = ۰$$

یا بطرز دیگر $\frac{ما}{لا} = \frac{ما}{ما}$ کے لئے حل کرنے کے بغیر

اس لئے $\frac{ما}{لا} = \frac{ما}{ما}$ یہ مساوات ان تمام خطوط مستقیم کی تفرقی مساوات ہے جو مبداًیں
 سے گذرتے ہیں اور اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ مبداًیں سے
 گذرنے والے کسی خط مستقیم کی سمت اس کے کسی نقطہ پر دہی ہے
 جو اس نقطہ اور مبداً کو ملائے والے سمتی کی ہے۔

۳۔ اب فرض کرو کہ منحیات کے قبیل کو تعبیر کرنے والی مساوات

$$ف (لا، ما، ا، ب) = ۰ \dots \dots (۱)$$

ہے جس میں دو اختیاری مستقل $\frac{ا}{ب}$ ہیں اور قبیل کے مختلف
 منحنی ان مشتقات کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ بلحاظ
 لاکے اوپر کی مساوات کا ایک دفعہ تفرق کرنے سے $\frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما}$ اور $\frac{ا}{ب}$
 میں ایک ربط حاصل ہوگا فرض کرو کہ یہ ربط ہے

$$ف (لا، ما، ا، ب) = ۰ \dots \dots (۲)$$

اگر ایک دفعہ اور لمحاظ لا کے اس کا تفرق کیا جائے تو
لا، ما، با، م، وا، ب میں ایک ربط ملے گا، فرض کرو کہ یہ حسب
ذیل ہے

صہ (لا، ما، با، م، وا، ب) = (۳)
ان تین مساواتوں سے وا، ب ساقط ہو سکتے ہیں کم از کم نظری لحاظ
سے (اگر ہم پہلے سے عمل تفرق میں ساقط نہیں ہو چکے) اسی طرح
لا، ما، با، م، وا کو باہم منسلک کرنے والا ایک ربط مثلاً

ف (لا، ما، با، م، وا) =
حاصل ہوگا جو قبیل مفروض کی تفرقی مساوات ہوگی۔

۴۔ مساوات کا رتبہ
تعریف کے طور پر ہم اسے مان لیتے ہیں کہ تفرقی مساوات کا رتبہ
اس اعلیٰ ترین تفرقی سرے متعین ہوتا ہے جو اس میں واقع ہوتا ہے۔
ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر دو مجہولوں کی کسی مساوات میں ایک اختیاری
مستقل واقع ہو تو اس مستقل کو ساقط کرنے پر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات
حاصل ہوتی ہے اور اگر مساوات میں دو اختیاری مستقل واقع ہوں تو انہیں
ساقط کرنے پر دوسرے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔
یہ استدلال بالکل عام ہے، ان اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے کیلئے
ہمیں ان دفعہ تفرق کرنا ہوگا اور اس طرح لا، ما، با، م، وا کو
باہم ربط دینے والی ایک تفرقی مساوات حاصل ہوگی جس کا رتبہ صریحاً
ن ہوگا۔

مثال ۱۔ مساوات لا + ما = ۲ + لا + ج سے وا اور ج کو
ساقط کرو۔

تفرق کرنے سے لا + ما + م = وا
دوبارہ تفرق کرنے سے ۱ + م + با =
صرف عمل تفرق سے ہی مستقل غائب ہو چکے ہیں، اور یہ دوسرا

رتبہ کی تفرقی مساوات ہے (واضح ہو کہ بڑے سے بڑا تفرقی سراسر میں مالم ہے) جو ان تمام دائروں سے متعلق ہے جن کے مرکز لا، محور پر واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ ان تمام مرکز دار مخروطی تراشوں کی تفرقی مساوات معلوم کرو جن کے محور محدودوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔
مخروطیوں کے اس قبیل کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات ہوگی

$$لا + ب = م$$

تفرق کرنے سے $لا + ب = م$

دوبارہ تفرق کرنے سے $ب = (م - لا)$

جس سے $لا = (م + ب)$ ۔ مالم =

مطلوبہ تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۵۔ عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا۔

بالعموم اوپر کا عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا اور جب ایک قبیل کی تفرقی مساوات دی ہوئی ہو اور ہم اس کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں عمل اسقاط کی طرح چند معیاری صورتوں سے کام لے بغیر چارہ نہیں ہوتا اور کئی مساواتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جنہیں ہم مطلق حل نہیں کر سکتے۔

مثلاً ہم اوپر کی دفعات سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ن ویں رتبہ کی تفرقی مساوات کو حل کرنا مقصود ہو تو ہمیں لا، م اور ن اختیار کی مستقلات میں ایک ایسا جبریہ ربط معلوم کرنا چاہیے کہ ان مستقلات کو ساقط کرنے پر مفروضہ تفرقی مساوات حاصل ہو سکے۔ ایسا جبریہ ربط مساوات کا عام سے عام حل خیال کیا جاتا ہے۔

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۶۔ انکی پانچ معیاری صورتیں ہیں
صورت اول۔ متغیر جدائی پذیر

وہ تمام مساواتیں جن میں فر لا اور لا والی تمام رتقیں مساوات کے ایک طرف اور فر ما اور ما والی تمام رتقیں دوسری طرف لائی جائیں اس صورت کے تحت میں آتی ہیں اور تکمیل کرنے سے فوراً حل ہو سکتی ہیں

مثال ۱۔ مثلاً اگر $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فر ما

تو $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ جم لا فر لا = جم ما فر ما
تکمیل کرنے سے ربط جب لا = جب ما + ۱
حاصل ہوتا ہے جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

مثال ۲۔ اگر $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ لا فر ما

تو $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{z}$ فر لا = (ما + ۱) فر ما

اس لئے $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ لوک لا = $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ۱
جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

اسٹلم

فہم کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

۱۔ لا جم ما فر لا = ما جم لا فر ما

$$۲ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۱ + لا۲}{۱ + لا۱ + لا۲} - ۳ \frac{فرما}{فرلا} + \frac{۱ + لا۱ + لا۲}{لا۱ + لا۲ + لا۳} = ۰$$

۷۔ ثابت کرو کہ مثال ۳ کے قبیل منحنیات کا ہر ایک رکن مثال ۲ کے ہر رکن کو علی القوانیم قطع کرتا ہے۔

$$۵ - لا۱ \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱ + لا۱}{لا۱ + لا۲} (۱ + لا۱ + لا۲)$$

$$۶ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۱ - لا۲}{لا۱ + لا۲}$$

۷۔ ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جن میں عماد کا مربع سمتی نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے یا تو دائرے ہیں یا قائم زاہد۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک ایسا منحنی جس کے کسی نقطہ پر کاماس اس نقطہ کے سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ (عہ) بنائے صرف اس عجت

۹۔ ۱) وہ مم عہ سے متعلق ہو سکتا ہے۔

۹۔ اُن منحنیات کی مساواتیں معلوم کرو جن میں

(۱) کارٹینری زیر کاماس مستقل ہو

(۲) کارٹینری زیر عماد مستقل ہو

(۳) قطبی زیر کاماس مستقل ہو

(۴) قطبی زیر عماد مستقل ہو

۱۰۔ اُس منحنی کی کارٹینری مساوات معلوم کرو جس کے کاماس کا طول مستقل ہو۔

صورت دوم۔ خطی مساواتیں

حسب ذیل شکل کی مساوات

$$لا۱ + ف۱ + ق۱ + لا۲ + ق۲ + + ک۱ + لا۱ = ر$$

جہاں ق، ق، ... ک، ر متغیر لا کے تفاعل یا مستقل مقدر ہیں
 ہیں خطی مساوات کہلاتی ہے، اس مساوات کی خصوصیت یہ ہے
 کہ اس میں تفرقی سرور کی ایک سے بڑی قوت یکساں نہیں ہوتی
 فی الحال چونکہ ہم پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر غور کر رہے
 ہیں اس لئے خطی مساوات کی صورت زیر بحث یہ ہوگی

اگر اس کے دونوں جانب کوکٹ فلا سے ضرب دیدیا جائے
 تو مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{ق}{ق} (ما کوکٹ فلا) = ق کوکٹ فلا$$

$$پس ما کوکٹ فلا = ق کوکٹ فلا + د$$

یہ لا، ما کا باہمی ربط تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس میں یک
 اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ مطلوبہ حل ہے۔

جزو ضربی کوکٹ فلا کے ساتھ ضرب دینے سے مساوات

کے دائیں جانب کا رکن پورا تفرقی سر ہو جاتا ہے، اس لئے اسے
 مکمل جزو ضربی کہتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱۔ } ما + لا = لا کو مکمل کرو۔$$

مکمل جزو ضربی یہاں کوکٹ فلا یا کوکٹ فلا ہے اور اس لئے مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{ق}{ق} (ما کوکٹ فلا) = لا کوکٹ فلا$$

$$یا ما کوکٹ فلا = کوکٹ فلا + د$$

$$\text{یعنی } ۱ + ۱ - ۱ = ۱$$

$$\text{مثال ۲- } ۱ + \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۱} = ۱ \text{ کو مکمل کرو۔}$$

اس جگہ شکل جزو ضربی کو $\frac{۱}{۱}$ فرما = دو لوک لا = لا ہے اور مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے $(۱ + ۱) = ۱$

$$\text{اور } ۱ + ۱ = ۱ \text{ یا } ۱ + \frac{۱}{۱} = ۱$$

۸۔ ایسی مساواتیں جو خطی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں

کئی مساواتیں جو دیکھنے میں خطی شکل

$$\frac{۱}{۱} + ۱ = ۱$$

کی نہ ہوں متغیروں کو مد لئے سے فوراً اس شکل میں لائی جاسکتی ہیں۔
ایک مشہور صورت ذیل میں مندرج ہے

$$\frac{۱}{۱} + ۱ = ۱$$

$$\text{یا } ۱ + \frac{۱}{۱} = ۱$$

$$\text{رکھو } ۱ = ۱$$

$$\text{تو } ۱ = ۱$$

$$\text{یا } \frac{۱}{۱} + (۱ - ۱) = (۱ - ۱)$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل = ہے
 ی و (۱-ن) کر ق و = (۱-ن) کر ق و (۱-ن) کر ق و لا + ۱

یعنی ما ۱-ن و (۱-ن) کر ق و = (۱-ن) کر ق و (۱-ن) کر ق و لا + ۱

مثال ۱- $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ کو مکمل کرو

یہاں ما ۱-ن و (۱-ن) کر ق و = (۱-ن) کر ق و (۱-ن) کر ق و لا + ۱
 یا = $\frac{1}{x}$ ی رکھنے سے

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 1$

اور چونکہ مکمل جزو ضربی و = $\frac{1}{x}$ و = $\frac{1}{x}$ = $\frac{1}{x}$ ہے

اس لئے $\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 1$

یعنی $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + 1$ لوک = $\frac{1}{x}$ + ۱

یعنی $\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ لا لوک لا

مثال ۲- مساوات $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1$ لا جب ۱-ن = لا جم ما کو مکمل کرو
 جم ما پر تقسیم کرنے سے

قطا ما $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1$ لا مس = لا
 رکھو مس = ی

$$\text{تب } \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + ۲\text{ لا می} = \text{لا}^۲$$

مشکل جزو ضروری ہو کہ لا فرلا ہے اس لئے

$$\text{می فرلا} = \text{ک لا}^۲ \text{ فرلا} + ۱$$

فرض کر دو کہ لا = سہ

تب ۲ لا فرلا = فرسہ

$$\text{پس ک لا}^۲ \text{ فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{ ک سہ نو سہ فرسہ}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ نو سہ (سہ - ۱)}$$

$$\text{پس مس ما} \times \text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{ فرلا}^۲ (۱ - ۲) + ۱$$

جو مساوات مفروضہ کا حل ہے۔
ظاہر ہے کہ اس قسم کی مساواتوں کو خطی (یا کسی اور معلومہ) صورت
میں لانے کے لئے بیڑمی فراست اور تیز فہمی کی ضرورت ہوگی۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو مکمل کرو

$$۱- (۱+لا^۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ما = \text{فرلا}^۲ - ۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ما = \text{جب ب لا}$$

$$۳- \frac{\text{فرط}}{\text{فرط}} + \frac{۱}{ط} = ۱ ط کا - ۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} + \frac{لا}{ط} = ما$$

$$۵- (۱+ما^۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ - ۶ \left(\frac{۱}{لا} - \frac{لا^۲}{لا} \right) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = ۱$$

۷۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۷ کے حل میں کوئی زیادہ عمومیت پیدا نہیں ہوتی اگر شکل جزو ضربی و مرکب فرلا کے حاصل کرنے میں قوت نمائے ساتھ ایک مستقل کا اضافہ کر دیا جائے۔

۸۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن میں کارٹیزیئر زیر عماد ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کا مربع۔
ذیل کی مساواتوں کو مکمل کرو

$$9 - \frac{f}{x} = \frac{1}{x} + \frac{f}{x^2} \quad 10 - \frac{f}{x} = \frac{1}{x} + \frac{f}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$11 - \frac{f}{x} = \frac{1}{x} + \frac{f}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$12 - \frac{f}{x} = \frac{1}{x} + \frac{f}{x^2} = \frac{1}{x^3} \text{ مس } [\text{رکھو } = \text{جب } y]$$

$$13 - \frac{f}{x} = \frac{1}{x} + \frac{f}{x^2} = \frac{1}{x^3} \text{ مس } [\text{رکھو } = \text{جب } y]$$

$$14 - \frac{f}{x} = \frac{1}{x} + \frac{f}{x^2} = \frac{1}{x^3} \text{ مس } [\text{رکھو } = \text{جب } y]$$

۱۵۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن کے سمتی نیم قطر اور قطبی زیر عماد کے متکافوں کا مجموعہ مستقل ہو۔

۱۶۔ ایسے منحنیات کے قبیل کی قطبی مساوات معلوم کرو جن میں سمتی نیم قطر اور قطبی زیر عماد کا مجموعہ ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کی 'ن' دیں قوت۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ ایسے منحنی جن میں انحناء کا نیم قطر ایسے بدلتا ہو جیسے عماد پر کے عمود کا مربع ایک ایسی جماعت سے تعلق رکھتے ہیں جس کی پائیں مساوات $\frac{1}{x} + \frac{f}{x^2} = \frac{1}{x^3}$ ہو

ہے جہاں ک ایک معلومہ اور λ اختیاری مستقل ہے۔

۱۸۔ ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

$$(۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱}{لا} + \frac{فرما}{فرلا} \quad (۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} = ۱ + \frac{فرما}{فرلا} = قو جب بلا$$

$$(۳) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{مس ما}{لا + ۱} = (لا + ۱) قو قطا$$

$$(۴) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{ن (دا)}{ن (دا)} = قه (لا) قه (لا) = \frac{ق (دا)}{ن (دا)}$$



باب دوم

پہلے رتبہ کی مساواتیں (مسل)
متجانس مساواتیں - ایک حرف غائب
کلیروی صورت

۹- صورت سوم - متجانس مساواتیں -
جو مساواتیں لا، ما میں متجانس ہوں وہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$\text{لا} \left(\frac{\text{لا}}{\text{فر لا}} , \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} \right) = 0$$

(۱) اگر ممکن ہو تو اس صورت میں ہم مساوات کو $\frac{\text{فر لا}}{\text{لا}}$ کے لئے
حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس طرح اس شکل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} = \text{فہ} \left(\frac{\text{لا}}{\text{لا}} \right)$$

اس میں رکھو ما = ولا

تو حاصل ہوگا ولا + لا $\frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} = \text{فہ} (و)$

$$\text{یا} \frac{\text{فر و}}{\text{فہ (و)}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}}$$

اس طرح متغیر الگ ہو جاتے ہیں اور مساوات کا حل صورت اول کی

تحت میں آجاتا ہے۔

$$\text{پس } \text{لوک لا} = \frac{\text{فر د}}{\text{فہ (د) - د}}$$

(ب) لیکن اگر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو مساوات کو $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$ کے لئے حل کرنا چاہئے، اس طرح $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے لئے ع رکھنے سے

$$\text{ما} = \text{لا فہ (ع)} \dots \dots \dots (۱)$$

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$\text{ع} = \text{فہ (ع)} + \text{لا فہ (ع)} \quad \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فہ (ع) فر ع}}{\text{ع - فہ (ع)}}$$

اس مساوات کو تکمیل کرنے سے ہم لا کو ع کے تفاعل اور ایک اختیاری مستقل کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں

یعنی $\text{لا} = \text{فہ (ع)}$ فرض کرو $\dots \dots \dots (۲)$
ع کو ان مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنے سے حل مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ } (\text{لا} + \text{ما}) \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لا ما}$$

$$\text{یہاں } \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{لا ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

اور $\text{ما} = \text{لا}$ رکھنے سے

$$\text{لا } \frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}} = \text{د} = \frac{\text{فر د}}{\text{فر لا} + \text{د}}$$

$$\text{یا لا فرد} = -\frac{۳}{۱+۲}$$

$$\text{یا لا فرد} = -\left(\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۳}\right) \text{ فرد}$$

$$\text{یا لوک لا} = \frac{۱}{۳} - \text{لوک و}$$

$$\text{یا و ما} = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۲۔ فرض کرو کہ مساوات یہ ہے

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳} + \left(\frac{۲}{۳}\right)$$

$$\text{یعنی } ۱ = لا (ع + ع)$$

$$\text{تب } ع = (ع + ع) لا + (ع + ۱) \frac{ع}{۳}$$

$$\text{یا لا} = \left(\frac{۲}{ع} + \frac{۱}{۳}\right) \text{ فر ع} =$$

$$\text{جس سے حاصل ہوتا ہے لوک لا} + ۲ \text{ لوک ع} - \frac{۱}{ع} =$$

$$\text{یعنی لا ع} = \frac{۱}{ع}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ع - ع = \frac{۱}{لا} \\ لا ع = ع \end{array} \right.$$

اور

کام حاصل اسقاط حل مطلوب ہے۔

$$\text{یہ حال اسقاط ہے لوک } \left\{ \frac{۲}{لا} - ۱ \right\} = \left\{ \frac{۲}{لا} + ۱ \right\} \frac{لا}{۳} = \frac{۲+۱}{۳}$$

لیکن اگر جبر یہ طریق پر ع کو سا قط کرنا ممکن نہ ہو یا اگر سا قط کرنے پر ایک بے ڈھنگا سا نتیجہ حاصل ہو تو عام طور پر ع والی ان مساواتوں

کو بغیر بدلے اسی شکل میں چھوڑ دیتے ہیں اور انہیں ایسی ہیمنز مساواتیں خیال کرتے ہیں جن کا ع حاصل استقامت تفرقی مساوات کا حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱- \frac{۵}{۵+۳} = \frac{۳}{۳+۵} \quad ۲- (۳+۵) = (۳+۵) \quad \frac{۳}{۳+۵}$$

$$۳- ۵ = \frac{۳}{۳+۵} = ۳ \quad ۴- ۵ = ۳ = \frac{۳}{۳+۵} + \left(\frac{۳}{۳+۵} \right)$$

$$۵- ۵ = ۳ = \left\{ \frac{۳}{۳+۵} + ۳ \right\}$$

۱۰- خاص صورت

مساوات $\frac{۳}{۳+۵} = \frac{۳}{۳+۵}$ باسانی تجانس شکل میں
اس طرح لائی جاسکتی ہے

اس میں رکھو $\begin{cases} ۵ = ۳ + ۲ \\ ۳ = ۵ - ۲ \end{cases}$ جہاں ۲ عا متغیر ہیں اور
ہر اک مستقل۔

$$\text{تب } \frac{۳}{۳+۵} = \frac{۳}{۳+۵} \quad \text{۵} = ۳ + ۲ \quad ۳ = ۵ - ۲$$

اب ہر اک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ
۵ = ۳ + ۲ = ۳ + ۲ = ۳ + ۲

پس $\frac{۳}{۳+۵} = \frac{۳}{۳+۵} = \frac{۳}{۳+۵}$

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرعا}}{\text{فرضا}} = \frac{\text{ا و ضا} + \text{ب عا}}{\text{ا و ضا} + \text{ب عا}}$$

یہ مساوات متجانس ہے، اس میں ہم رکھ سکتے ہیں $\text{عا} = \text{و ضا}$ اور
تغیر حسب سابق الگ ہو سکتے ہیں۔

۱۱۔ لیکن ایک صورت میں ص، ک اس طرح منتخب نہیں ہو سکتے

$$\text{یعنی جبکہ} \quad \frac{\text{ا}}{\text{و}} = \frac{\text{ب}}{\text{ع}} \neq \frac{\text{ج}}{\text{ج}}$$

اس صورت میں فرض کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{و}} = \text{م}$ اور $\text{ا و لا} + \text{ب عا} = \text{ما}$

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \left(\frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} - 1 \right)$$

$$\text{پس} \quad \left(\frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} - 1 \right) \text{ب} = \frac{\text{عا} + \text{ج}}{\text{م عا} + \text{ج}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} = \frac{(\text{ا و م} + \text{ب عا} + \text{ا و ج} + \text{ب ج})}{\text{م عا} + \text{ج}}$$

$$\text{اور فرلا} = \frac{\text{م عا} + \text{ج}}{(\text{ا و م} + \text{ب عا} + \text{ا و ج} + \text{ب ج})} \text{فرعا}$$

تغیر اب الگ ہو سکتے ہیں اور مساوات کا مکمل حل میں آ سکتا ہے۔
۱۲۔ ایک اور صورت قابل توجہ ہے یعنی

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا و لا} + \text{ب عا} + \text{ج}}{\text{ب عا} + \text{ج}}$$

جہاں شمار کنندہ میں ما کا سر نسب نامہ لا کے سر کے مساوی
اور مختلف علامت ہے۔

اس صورت میں مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے
(ا و لا + ج) فرلا + ب (ما فرلا + لا فرما) = (ب عا + ج) فرما

جو ایک "ٹھیک یا حاصر" تفرقی مساوات ہے، اس کا تکمیل ہے
 $۱ لا + ۲ ج + لا + ۲ بی لا ما = بی ما + ۲ ج ما + م$
 جہاں م اختیاری مستقل ہے۔

مثال ۱۔ تکمیل کرو $\frac{۲ لا + ۳ ما - ۸}{۳ لا + ما - ۳} = \frac{۲ لا}{۳ لا + ما - ۳}$ کو۔
 رکھو $لا = ضا + م$ ، $ما = عا + ک$

پس $\frac{۲ ضا + ۳ عا + (۲ م + ۳ ک - ۸)}{۳ ضا + عا + (م + ک - ۳)} = \frac{۲ ضا}{۳ ضا + عا + (م + ک - ۳)}$
 م اور ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ

$$\begin{cases} ۲ م + ۳ ک - ۸ = ۰ \\ م + ک - ۳ = ۰ \end{cases} \text{ یعنی } م = ۱, ک = ۲$$

تب $\frac{۲ ضا + ۳ عا}{۳ ضا + عا} = \frac{۲ ضا}{۳ ضا + عا}$
 اب رکھو $عا = و$ ، $ضا = تب$

$$و + ضا = \frac{۲ + ۳}{و + ۱} = \frac{۵}{و + ۱}$$

$$- ضا = \frac{۲ - ۵}{و + ۱} = \frac{-۳}{و + ۱} = \frac{۳}{و + ۱}$$

$$- \frac{۳}{و + ۱} = \frac{۳}{و + ۱} \Rightarrow \frac{۱ + و}{۳ - (۱ + و)} = \frac{۱ + و}{۲ - و}$$

$$\# \left[\frac{۱ + و}{۳ - (۱ + و)} = \frac{۱ + و}{۲ - و} \right] \Rightarrow \left[\frac{۱ + و}{۳ - ۱ - و} = \frac{۱ + و}{۲ - و} \right]$$

۵۔ لوک ضا = $\frac{۱}{۲}$ لوک $\{ (۱ + و) - ۳ \} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱ - و}{۳ + ۱ + و}$

جہاں ضا = لا - ۱ اور $\frac{۲ - و}{۱ - و} = ۵$

مثال ۲۔ تکمیل کرو $\frac{فری}{فرلا} = \frac{لا + ما}{۱ - ما + لا}$ کو
فرض کرو کہ $لا + ما = سی$ ، تب

$$\frac{فری}{فرلا} = +1 = \frac{سی}{۱ - سی}$$

اور $فرلا = \frac{۱ - سی}{۱ - سی} فری = \frac{۱}{۱ - سی} [۱ - \frac{۱}{سی}] فری$

یعنی $لا = \frac{۱}{سی} - \frac{۱}{سی} = \frac{۱ - سی}{سی}$ لوک $(۱ - سی) + 1$
جہاں $سی = لا + ما$

مثال

ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو۔

$$۱ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما۳ + لا۲}{ما۲ + لا۳} \quad ۲ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۲ + ما۳}{۳ - ما۲ + لا۲}$$

$$۳ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۲ - لا + لا۲}{۳ - ما + لا۳} \quad ۴ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{ولا + ب - ا}{ب + لا + ولا - ب}$$

$$۵ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱ + ما + لا}{۱ - ما + لا} \quad ۶ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱ + ما + لا}{۱ + ما۲ + لا۲}$$

$$۷ - \frac{فرما}{فرلا} = (۵ - ما۳ + لا۲) + \frac{فرما}{فرلا} = ۵ - ما۲ + لا۳$$

$$۸ - \frac{فرما}{فرلا} = (۵ - ما۳ + لا۲) + \frac{فرما}{فرلا} = ۱ - ما۳ + لا۲$$

۹۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ 'لا' ما جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ

$$\frac{فرما}{فرت} = لا + ما + گ$$

$$\frac{\text{ملا}}{\text{موت}} = - (\text{ملا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ن})$$

میں مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$ف(ما، \frac{فر}{لا}) = ۰$$

اسے ہم $\frac{فر}{لا}$ یا ما کے لئے جیسا مناسب ہو حل کر سکتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{فر}{لا}$ کے لئے حل کیا جائے تو مساوات کی صورت یہ ہوگی

$$\frac{فر}{لا} = ف(ما)$$

$$تب \quad فر = ف(ما)$$

$$اور مکمل ہے لا = فر + ف(ما)$$

(۲) اگر $\frac{فر}{لا}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو ہم ما کے لئے حل کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوگا ما = ف(ع)

جہاں ع تفرقی سر $\frac{فر}{لا}$ کی بجائے لکھا گیا ہے۔

بمطابق لا کے جو مساوات میں موجود نہیں تفرق کرنے سے

$$ع = ف(ع) \frac{فر}{لا}$$

$$یعنی \quad فر = ف(ع) \frac{ع}{لا}$$

$$پس \quad لا = فر + ف(ع) \frac{ع}{لا}$$

تکمل کا عمل پورا کرنے پر ہم E کو اس مساوات اور $Ma = Fd$ (ع) سے ساکت کرتے ہیں، اس طرح مساوات مفروضہ کا 'حل حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ما غائب

(ب) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں Ma موجود نہیں ہے،

اس صورت میں اس کی شکل ہوگی $Fd = (La, \frac{F}{La}) = 0$ ۔

چونکہ $\frac{F}{La} = \frac{1}{\frac{La}{F}}$ اس لئے اوپر کی مساوات اس طرح بھی لکھی

جاسکتی ہے $Ma = (La, \frac{F}{La}) = 0$ ۔

پس اگر Ma کو متغیر متبوع مانا جائے تو دفعہ ماقبل کی تشریح کا اطلاق اس پر بھی ہوتا ہے اور وہ اس طرح۔

(۱) بشرط سہولت $\frac{F}{La}$ کے لئے حل کرنے سے اس طرح کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{F}{La} = Fd = (La)$$

$$تب \quad \frac{F}{La} = Fd = (La)$$

$$اور تکمیلی ہے \quad Ma = \int \frac{F}{La} + 1$$

(۲) لیکن اگر $\frac{F}{La}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو

لا کے لئے حل کرنے سے ہم اس طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں لا = فہ (ق)
 جہاں ق، $\frac{ق}{ق-لا}$ کے لئے لکھا گیا ہے۔ بلحاظ ما کے جو مساوات
 میں موجود نہیں ہے تفرق کرنے سے

$$ق = فہ (ق) \frac{ق}{ق-لا}$$

$$\text{اس طرح درما} = \frac{فہ (ق)}{ق} \text{ فرق}$$

$$\text{اور ما} = \frac{ق-فہ (ق)}{ق} \text{ فرق} + 1$$

مکمل کا عمل پورا کرنے پر ہمیں ق کو اس مساوات اور لا = فہ (ق)
 سے ساقط کرنا چاہئے، اس طرح تفرقی مساوات کا حل مطلوب
 حاصل ہوگا۔

طالب علم دیکھے کہ دونوں صورتوں میں خواہ لا موجود نہ ہو
 یا ما، ہم حتی الامکان سب سے پہلے $\frac{ق}{ق-لا}$ کے لئے حل کرنے کی
 کوشش کرتے ہیں، لیکن اگر یہ عمل تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو باقی
 ماندہ حرف کے لئے حل کرنے کے بعد ہم اُس حرف کے لحاظ
 سے جو مساوات میں موجود نہ ہو تفرق کرتے ہیں، پس
 یہ صورت میں جو حرف مساوات میں موجود نہیں ہوتا اُسے
 متغیر متبوع خیال کیا جاتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ مساوات ۱ + لا۔ لا} = \frac{ق}{ق-لا} \text{ کو مکمل کرو}$$

$$\text{اسجگہ} \frac{ق}{ق-لا} = \frac{لا}{1+لا} \text{ یعنی درما} = (لا + \frac{1}{لا}) \text{ درلا}$$

اور $ما = \frac{لا}{۲} + لوک لا + ۱$ حل مطلوب ہے

مثال ۲۔ حل کرو $لا = \frac{فرما}{۲} + ۱ = (\frac{فرما}{فرلا})$ کو۔
مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$لا = ق + \frac{۱}{ق} \quad \text{جہاں } ق = \frac{فرما}{فرلا}$$

یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے۔ اس کے محاط سے تفریق کرتے سے

$$ق = (۱ - \frac{۱}{ق}) \frac{فرق}{فرما}$$

$$یا \frac{فرق}{فرما} = \frac{۱}{ق} - \frac{۱}{ق۲}$$

$$\text{اور } ما = لوک ق + \frac{۱}{ق۲} + ۱$$

اس مساوات اور مساوات $لا = ق + \frac{۱}{ق}$ کا
ق، حاصل استقاط حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$۱ - \frac{فرما}{فرلا} = ما + \frac{۱}{ما} \quad ۲ - \frac{فرما}{فرلا} = لا + \frac{۱}{لا}$$

$$۳ - \sqrt{لا + ۱} = \frac{فرما}{فرلا} + لا$$

$$۴ - (۲ لا + لا) = \frac{فرما}{فرلا} = ۲ + ۲ لا$$

$$۵- (۲ + ۱) \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \quad ۱ + ۲ = ۱$$

$$۶- ۱ = ۱ \text{ جب } ۱ - \left(\frac{۱}{۲} \right) = \frac{۱}{۲} \text{ جم } \left(\frac{۱}{۲} \right)$$

$$۷- ۱ = ۱ \text{ } ۱ + \left(\frac{۱}{۲} \right) = ۱ \text{ ب } \left(\frac{۱}{۲} \right)$$

$$۸- ۱ = ۱ \text{ لا } \left(\frac{۱}{۲} \right) = ۱ + ۱ \text{ ب } \frac{۱}{۲}$$

$$۱۵- \text{صورت پنجم} - \text{کلیدی صورت } ۱ = ۱ \text{ لا } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ ف } \left(\frac{۱}{۲} \right)$$

$$\frac{۱}{۲} - ۱ = ۱ \text{ ع لے لکھنے سے}$$

$$۱ = ۱ \text{ ع لا + ف } (ع) \dots \dots \dots (۱)$$

بحفاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$ع = ۱ + لا \frac{۱}{۲} + ف (ع) \frac{۱}{۲}$$

$$یا \{ لا + ف (ع) \} \frac{۱}{۲} = \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{جس سے } \frac{۱}{۲} = ۱ \text{ یا لا + ف } (ع) = ۱$$

$$\text{اب } \frac{۱}{۲} = ۱ \text{ سے حاصل ہوتا ہے } ع = ۱ \text{ ج جہاں ج مستقل ہے}$$

پس ۱ = ۱ ج لا + ف (ج) تفرقی مساوات کا ایک حل ہے جہاں ج مستقل ہے۔

نیز اگر ع کو مساوات

لا + فن (ع) = (۳)
 سے لا کی رقوم ہیں معلوم کیا جائے تو ع ، لا کا ایک تفاعل ہوگا
 اور اگر ع کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کی جائے اور جو
 ایک ہی بات ہے کہ لا کو مساواتوں (۱) اور (۳) سے ساقط کیا
 جائے تو ہمیں لا میں ایک ربط حاصل ہوگا اور یہ بھی تفہمی
 مساوات کو پورا کرے گا۔
 اب ع کو مساواتوں

$$ما = ع لا + فن (ع)$$

$$= لا + فن (ع)$$

سے ساقط کرنا وہی بات ہے کہ ج کو مساواتوں

$$ما = ج لا + فن (ج)$$

$$= لا + فن (ج)$$

سے ساقط کیا جائے یعنی ج کی مختلف قیمتوں کے لئے خط

$$ما = ج لا + فن (ج) \text{ کا لگاتار معلوم کیا جائے۔}$$

اس لئے مساوات مفروضہ کے حل دو طرح کے ہیں۔
 (۱) خطی حل جسے ”مکمل ابتدائی“ کہتے ہیں اور جس میں ایک اختیاری
 مستقل شامل ہوتا ہے۔

(۲) لغات یا ”نادر حل“ جس میں کوئی اختیاری مستقل شامل
 نہیں ہوتا اور نیز یہ حل مکمل ابتدائی سے اختیاری مستقل کی جگہ
 کوئی خاص عددی قیمت مندرج کرنے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔
 ان حلوں کے درمیان ہندسی ربط یہ ہے کہ کامل ابتدائی
 خطوط کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے اور نادر حل ان کے
 لغات کو۔ نادر حلوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر
 ہے اور مزید معلومات کے لئے طالب علم بڑے رسالوں کا مطالعہ
 کرے۔

مثال - حل کرو $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 2$

کلیدی قاعدہ کی رو سے کامل ابتدائی ہے

$$\frac{1}{m} + m = 6$$

لغات یا نادر حل اوپر کی مساوات اور

$$\frac{1}{2m} - y = 0$$

کے درمیان مہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا۔

نادر حل ہے $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور لا

طالب علم فوراً پہچان لیگا کہ مادر حل ما = م اول

مکافاتی کی سادات ہے اور کامل ابتدائی $\frac{1}{m} + m = \frac{1}{m}$

مکافی مے ماسر کی مساوات ہے۔

اشد

تیل کی ہر ایک صورت میں کامل ابتدائی اور لغائی حل معلوم کرو

$${}^{\text{ع}}\text{ع} + \text{ع} = 6 - 2$$

$$3x + 2x = 6 - 2$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = 1 - 3 \quad x + \sqrt{x^2 + 1} = -2$$

$$c = (1 - \epsilon)(\lambda c - b) - \gamma \quad \lambda c - \epsilon(1 - \lambda) = b - \delta$$

$$c = (1 - e)(a - b) - y$$

۱۶- مساوات $1 = 10^0$ (ع) + مساوات (ع) (۱)

بھی پہلے بلواؤ لا کے تفرق کرنے پھر ع کو متغیر متبوع خیال کرنے سے حل ہو سکتی ہے۔

تفريق کرنے سے

$$ع = فہ (ع) + لا فہ (ع) \frac{ع}{فرلا} + ساد (ع) \frac{ع}{فرلا}$$

$$\text{جس سے } \frac{ع}{فرع} + لا \frac{فہ (ع)}{فہ (ع) - ع} = \frac{ساد (ع)}{فہ (ع) - ع}$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$لا \frac{فہ (ع) \frac{ع}{فرع}}{فہ (ع) - ع} = ع \frac{ساد (ع)}{فہ (ع) - ع} \quad \text{و } \frac{فہ (ع) \frac{ع}{فرع}}{فہ (ع) - ع} = ع + لا$$

..... (۲)

اب اگر مساواتوں (۱) اور (۲) سے ع کو ساقط کیا جائے تو اصلی مساوات کا مکمل ابتدائی حاصل ہوگا۔

مثال۔ حل کرو $۲ع + لا = ۱$ (۱)

$$\text{تفرق کرنے سے } ع = ۲ + لا \frac{ع}{فرلا} + ع \frac{ع}{فرلا}$$

$$\text{یا } ع = ۲ + لا \frac{ع}{فرع} - ع$$

$$\text{یعنی } \frac{ع}{فرع} = (ع - لا) \quad \text{۲ع} = ع - لا$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $ع - لا = \frac{۲ع}{فرع} - ع$ (۲)
ان مساواتوں کا ع، حاصل اسقاط اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔ پہلے ع کے لئے مساوات (۱) کو حل کرو پھر (۲) میں مندرج کرو۔ لیکن اگر نتیجہ کو منطق صورت میں پیش کرنا مطلوب ہو تو اس طرح عمل کرو

$$\text{مساوات (۲) سے } ۲ع + لا = ع - لا \quad \text{۲ع} = ع - لا - لا$$

$$\text{(۱) سے } ع + لا = ع - لا - ع$$

$$\text{اس لئے } ع - لا - ع = ع - لا - ع$$

اس مساوات اور $ع + لا = ع - لا - ع$ سے چلیپی ضرب کے

فریضہ

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{6}{13 - 6} = \frac{6}{7}$$

جس سے حاصل استقاط ہے $3(2 + \frac{1}{3}) (1 + \frac{1}{2}) = (1 + \frac{1}{2}) (2 + \frac{1}{3}) = 3(1 + \frac{1}{2})$
 ۱۔ ع کو ساقط کرنے کا جبریہ عمل کئی صورتوں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے، ایسی صورتوں میں استقاط کا عمل فی الحقیقت نہیں کیا جاتا لیکن مساواتوں (۱) اور (۲) کو ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کیا جاتا ہے جن کا ع، حاصل استقاط مساوات زیر بحث کا حل مطلوب ہوتا ہے

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$\begin{aligned} 1 - 2 &= 6 - 2 & 1 - 3 &= 6 - 3 \\ 1 - 4 &= 6 - 4 & 1 - 5 &= 6 - 5 \\ 1 - 6 &= 6 - 6 \end{aligned}$$

۸۔ ایک منحنی کے نقطہ ن پر کا ماس محور و ما سے ت پر ملتا ہے اور و ت اس زاویہ میلان کے ماس کے متناسب ہے جو ن ت کا و لا کے ساتھ ہے، منحنی کو معلوم کرو۔ [آکسفورڈ ۱۸۸۸ء]
 ۹۔ جو منحنی یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ حوالہ کے محوروں پر ان کے ماسوں کے مقطوعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

کامل ابتدائی معلوم کرنے سے ماس کی مساوات اور نادر حل منحنیات زیر بحث کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۔ وہ منحنی معلوم کرو جن کی صورت میں اس مثلث کا رقبہ جو حماس اور حوالہ کے محوروں کے درمیان بنتا ہے مستقل ہو۔

۱۱۔ جن منحنیات میں حماس کے اس حصہ کا طول جو حوالہ کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہو ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو بحال ابتدائی اور نادر مل کو حاصل کرو اور ہر ایک کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

۱۲۔ ایک منحنی تفرقی مساوات $ما = ع (لا - ع)$ کو پورا کرتا ہے، نیز اگر $لا = \frac{1}{2} ع =$ تو $ع =$ ما منحنی کی مساوات معلوم کرو [آکسفورڈ ۱۸۸۹ء]

۱۳۔ مساوات ذیل کا کامل ابتدائی اور نادر مل معلوم کرو

$$قو^3 (ما - \frac{قو}{قلا}) = ج \{ قو + (\frac{قو}{قلا}) \}^2 \quad [آکسفورڈ ۱۸۹۰ء]$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر $لا^2 = س$ اور $ما^2 = ت$ تو مساوات ذیل

$$لا لا ما ما + (لا^2 - لا ما - ما^2) = لا ما =$$

کلیدی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔

اس طرح سے اس کا کامل ابتدائی اور نادر مل معلوم کرو۔ نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔



باب سوم

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

ٹھیک یا حاضر تفرقی مساواتیں

۱۸۔ دوسرے رتبہ کی مساوات
اب ہم دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کریں گے
فہ (لا، ما، ما، ما، ما) =

اس کے حل کرنے کا کوئی عام طریقہ نہیں ہے، مگر اس کی خاص صورتوں کا
حل کرنا چنداں مشکل نہیں۔

۱۹۔ صورت اول فرض کرو کہ یہ خطی مساوات ہے

اسکی نمونہ کی صورت ہوگی $\frac{2}{3} \text{ لا} + \frac{1}{4} \text{ ف} + \frac{1}{5} \text{ ق} = \text{ما}$

جہاں ف، ق، لا متغیر لا کے تفاعل ہیں۔
اس مساوات کو حل کرنے کی تدبیر یہ ہے کہ پہلے ر کو حذف کر کے مساوات

$\frac{2}{3} \text{ لا} + \frac{1}{4} \text{ ف} + \frac{1}{5} \text{ ق} = \text{ما}$

کا کوئی حل معلوم کیا جائے یا ویسے ہی بھانپ لیا جائے۔
فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{فہ (لا)}$ اس کا ایک حل ہے، اصلی مساوات میں رکھو

$\text{ما} = \text{می فہ (لا)}$

$\text{لا} = \text{می فہ (لا)} + \text{می فہ (لا)}$

$$۱ = ی فہ (لا) + ۲ ی فہ (لا) + ی فہ (لا)$$

ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$۱ = ی فہ (لا) + ۲ ی فہ (لا) + ی فہ (لا)$$

$$+ ۳ ی فہ (لا) + ۴ ی فہ (لا)$$

$$+ ۵ ی فہ (لا) = ۱$$

$$\text{لیکن فہ (لا) + ۳ فہ (لا) + ۵ فہ (لا) = ۱} \text{ حسب مفروض}$$

$$\text{اس لئے } ی = \left\{ \frac{۱ - ۳ فہ (لا)}{۱ - ۵ فہ (لا)} \right\}$$

جو ی کے لئے خطی مساوات ہے
شکل جزو ضربی ہے

$$\text{وگرنہ } ۲ + \frac{۱ - ۳ فہ (لا)}{۱ - ۵ فہ (لا)} \text{ یا } [فہ (لا)] \text{ کو } ۱ \text{ فرلا}$$

اور پہلا تکمیلی ہے

$$۱ = ی فہ (لا) + ۲ ی فہ (لا) + ۳ ی فہ (لا) + ۴ ی فہ (لا) + ۵ ی فہ (لا)$$

جس سے دوسرا تکمیلی اور اس کے تفرقی مساوات کامل حاصل ہو سکتا ہے

$$\text{مثال - اس مساوات کو حل کرو } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} = ۱$$

$$\text{یہاں } ۱ = ۱ \text{ مساوات } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} = ۱ \text{ کا ایک حل ہے}$$

$$\text{اس لئے رکھو } ۱ = ۱$$

$$\text{تب } ۱ = ۱ + ۱$$

اور

$$\text{اس لئے } ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$م + \left(\frac{۲}{۳} لا + لا^۳ \right) م = لا^۲ نو - \frac{۲}{۳}$$

اور مکمل جزو ضربی ہے نو (لا + لا^۳) ولا یا لا^۲ نو - \frac{۲}{۳}

$$\text{پس } \frac{۲}{۳} لا (م) لا^۲ نو - \frac{۲}{۳} = لا^۲$$

$$\text{اور } م لا^۲ نو - \frac{۲}{۳} = لا^۲ + ۱$$

$$\text{یعنی } م = \frac{۱}{۵} لا^۳ نو - \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} نو - \frac{۲}{۳}$$

$$\text{جس سے } م = -\frac{۱}{۵} نو - \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} نو - \frac{۲}{۳} فرلا + ب$$

$$\text{اور مل مطلوب ہے } م = -\frac{۱}{۵} نو - \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} نو - \frac{۲}{۳} فرلا + ب لا$$

۲۰۔ صورت دوم۔ ایک حرف غائب
(ا) اگر مساوات میں لا موجود نہ ہو تو فرض کر دو کہ م = ع

$$\text{تب } م = \frac{ع}{فرلا} = ع \frac{ع}{فرلا}$$

اس طرح مساوات ف (م، م، م) = ۰ ہو جاتی ہے

$$\text{ف (ا، ع، ع) } = \left(\frac{ع}{فرلا} \right) = ۰$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

(ب) اگر م موجود نہ ہو تو فرض کر دو کہ م = ع

$$\text{تب } \frac{\text{عرع}}{\text{مرلا}} = \text{نہا}$$

اور فہ (لا، ما، ہا) = ہو جاتی ہے

$$\text{فہ (لا، ع، ہا)} = \frac{\text{عرع}}{\text{مرلا}} =$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ مساوات ما، ہا + ہا = ہا کو حل کرو۔

یہاں مساوات میں لا موجود نہیں ہے، پس رکھو ہا = ع اور ہا = ع عرعا

$$\text{اس طرح } \text{ما ع} = \frac{\text{عرع}}{\text{مرلا}} + \text{ع} = \text{ہا}$$

$$\text{یا } \frac{\text{عرع}}{\text{مرلا}} + \frac{\text{ہا}}{\text{ما}} = \text{ع}$$

یکمکن جزو ضربی ہے جو کہ $\frac{\text{ہا}}{\text{ما}} = \text{ہا}$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{عرع}}{\text{مرلا}} = (\text{ع، ہا}) = \text{ہا}$$

$$\text{یا ع، ہا} = \text{ہا} + \text{متقل} = \text{ہا} + \text{و} \quad (\text{فرض کرد})$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{ما مرلا}}{\text{ما + و}} = \text{مرلا}$$

$$\text{یا جنر } ۱ = \frac{۲}{۳} = ۲ + ۱$$

یعنی $۲ = ۱ + ۱$ جنر (۲ + ۱) = ۳
 مثال ۲ - حل کرو $۱ + ۲ = ۳$ لا $۲ = ۳$ کو
 یہاں مساوات میں ۲ موجود نہیں ہے، پس رکھو $۲ = ۳$

$$\text{اس طرح } ۱ + ۲ = ۳ \text{ لا } ۳ = ۳$$

$$\text{یا } \frac{۳}{۳} = \frac{۳}{۳}$$

$$\text{یعنی } ۱ = ۲ + ۱ \text{ کو } ۱ + ۲ = ۳ \text{ مستقل}$$

$$۱ + ۲ = ۳ \text{ (فرض کرو)}$$

$$\text{یا } ۱ = ۲ + ۱ \text{ کو } ۱ = ۲ + ۱$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $۱ = ۲ + ۱$ لا $۲ = ۳$ جنر $۱ = ۲ + ۱$ + ۲
 جہاں ۱ اور ۲ اختیاری مستقل ہیں۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱ - ۲ = ۱ + ۲ = ۳$$

$$۲ - ۳ = ۲ + ۳ = ۵$$

$$۳ - ۴ = ۳ + ۴ = ۷$$

$$۱ - ۲ = ۱ + ۲ = ۳$$

$$۲ - ۳ = ۲ + ۳ = ۵$$

$$۳ - ۴ = ۳ + ۴ = ۷$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$+ \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

یہ کاسر n درجہ $+ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ ہے۔

اگر n کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

تو جس رقم میں $\frac{1}{n}$ واقع ہوتا ہے وہ خارج ہو جاتی ہے
اسی طرح اگر n کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ تفرقی مساوات

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}$$

پوری ہو تو وہ رقم جس میں $\frac{1}{n}$ واقع ہوتا ہے خارج ہو جاتی ہے۔
یہ کاسر ہے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}$$

اگر n کی ایک قیمت معلوم ہو سکے یا ویسے ہی بھانپ لی جا سکے
جو اوپر کے جملہ کو صفر بنا دے تو $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}$

اور $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}$ رکھنے سے مساوات کا درجہ بقدر ایک کے

کم ہو سکتا ہے۔ طالب علم دیکھے کہ یہ جملہ شکل میں وہی ہے جو مساوات
معلومہ کے دائیں جانب کا رکن ہے۔

اس لئے اگر مساوات کا کوئی حل مل جائے وہ کسی طرح سے معلوم ہو سکے
جیکہ اس کا بائیں رکن ختم کیا جائے تو $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}$ اور
پھر $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}$ سے ہم مساوات کا ایک رتبہ کم کر سکتے ہیں

۲۲۔ صورت آئینی

جیسا اوپر بیان ہوا درجہ دوم کی مساوات

$$م + ف + با + ف + م = ق$$

میں $م = ق - \frac{1}{2} (ف + با)$ ہی مندرجہ کرنے سے اصلی مساوات

بعض اوقات سادہ صورت

$$م + ف + م = ق$$

میں تبدیل ہو سکتی ہے۔

لیکن اس مساوات کا عام حل ابھی تک نہیں حاصل کیا گیا۔

”ٹھیک“ یا حاضر تفرقی مساوات

$$۲۳۔ اگر $ق > ق$ تو $لا = \frac{ق}{ق - ق}$ ۔ کامل تفرقی ہے$$

اور مانوہ کچھ ہی ہو یہ ممکن ہو سکتا ہے

کیونکہ اگر $\frac{ق}{ق - ق}$ کو $م$ سے تعبیر کیا جائے تو

$$ق - لا = م = لا - م - ن - لا - م - ن - لا - م - ن - لا$$

$$ق - لا - م - ن - لا = لا - م - ن - لا - م - ن - لا - م - ن - لا$$

وغیرہ

$$ق - لا - م - ن - لا = لا - م - ن - لا - م - ن - لا - م - ن - لا$$

$$اس طرح $ق - لا - م - ن - لا = لا - م - ن - لا - م - ن - لا - م - ن - لا$$$

..... + (۱-) $\text{ا}^{\text{ا}}$ ماح۔ ن۔ ۱۔

ظاہر ہے کہ جب $ق = ن$ یا $ن > ق$ تو تکمل عمل میں نہیں آسکتا۔
 ۲۴۔ اوپر کے مسئلہ ابتدائی یا تہید یہ کی مدد سے ہم اکثر جلدی دیکھ
 سکتے ہیں کہ مساوات معلومہ حاضر مساوت ہے یا نہیں۔ کیونکہ اگر سب سے
 پہلے تمام رقمیں اس شکل $(\text{ا}^{\text{ا}})$ کی جن میں $ن > ق$ الگ کر لی جائیں
 تو اکثر اوقات فقط دیکھنے ہی سے ہم فوراً بتا سکتے ہیں کہ باقی ماندہ ارتقام کامل
 تفرقی سر بناتی ہیں یا نہیں۔

مثال $\text{ا}^{\text{ا}} \text{م} + \text{ا}^{\text{ا}} \text{م} + \text{ا}^{\text{ا}} \text{م} = \text{ما} = \text{جب لا}$

اس جگہ تہید یہ کی بنا پر $\text{ا}^{\text{ا}} \text{م}$ اور $\text{ا}^{\text{ا}} \text{م}$ کامل تفرقی سر ہیں اور ظاہر
 ہے کہ $\text{لا} \text{م} + \text{ما} \text{م} + \text{ما} \text{م}$ کا کامل تفرقی سر ہے، اس لئے اس مساوات کا
 پہلا تفرقی حسب ذیل ہے۔

$\text{ا}^{\text{ا}} \text{م} - ۲ \text{لا} \text{م} + ۲ \text{م} + \text{ا}^{\text{ا}} \text{م} - ۳ \text{لا} \text{م} + ۲ \text{م} + \text{ما} - \text{ما} = - \text{جم لا} + \text{ا}$

۲۵۔ جانچ کا زیادہ عام طریقہ
 حاضر تفرقی مساوات کو پرکھنے کا عام طریقہ سب ذیل ہے جبکہ مساوات
 عام صورت

$\text{ف} \text{ا} + \text{ف} \text{ا} + \text{ف} \text{ا} + \text{ف} \text{ا} + \text{ف} \text{ا} + \text{ف} \text{ا} + \text{ف} \text{ا} = \text{و}$

یہ دی گئی ہو جہاں $\text{ف} \text{ا}$ ، $\text{ف} \text{ا}$ ، $\text{ف} \text{ا}$ ، $\text{ف} \text{ا}$ ، $\text{ف} \text{ا}$ ، $\text{ف} \text{ا}$ ، $\text{ف} \text{ا}$ کسی شکل کے لا کے
 تفاعل ہیں۔
 اگر تفرقیوں کو زیروں سے تعبیر کیا جائے تو تکمل بالخصوص سے

$\text{ف} \text{ا} \text{ما} \text{م} = \text{ف} \text{ا} \text{ما} \text{م}$

کف-۱، مارلا = کف-۱، کف-۱، مارلا

فـ ۲-۵ = فـ ۱-۲ + فـ ۲-۵

کرف مارلا = ف مارلا + ف مارلا + ف مارلا

وغيره وغيره

اس نے جمع کرنے پر ظاہر ہے کہ اگر

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + f_n$$

تو مساوات مفروضہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تقرق ہے

$$(f - f_{-1} + f_{-2} - \dots + f_{-p+1} - f_{-p}) + b(f_{-p} - f_{-p-1} + f_{-p-2} - \dots + f_{-2p+1} - f_{-2p})$$

$$1 + f + f^2 + \dots + f^{n-1} = \frac{1-f^n}{1-f}$$

مثال کیا مسادات لایم + ۱۲ لایم + ۳۶ لایم + ۲۲ لایم = جب لا حاضر

مسافات ہے؟

حاضر مساوات کو بانچنے کے طریقہ کے موافق ہم دیکھتے ہیں کہ

$\text{ف} = \text{لا} = \text{ف} = \text{لا} = \text{ف} = \text{لا}$

اور $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

معلوم ہوا کہ یہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تکمیلی ہے

$$1 + \lambda_j = \frac{1}{r} \lambda_j + \frac{1}{r} (\lambda_j r - \lambda_j) + b (\lambda_j r + \lambda_j \mu_j - \lambda_j \mu_j)$$

يا ١٢ الأ٦ + ٨ الأ٦ + ٦ الأ٦ = - جم لا + ١

دایاں رکن کامل تفرقی سر ہوگا اگر

$$۱۲ لا^۲ - ۲۴ لا^۱ + ۱۲ لا^۰ = ۰$$

شرط پوری ہوتی ہے، پس دوسرا مکملی ہے

$$(۸ لا^۳ - ۳ لا^۲) + (۱۱ لا^۲ + ۱۱ لا^۱) = ۰ \text{ جب } لا + لا + لا + ب$$

یا
جسے پھر جانچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں رکن کامل تفرقی سر ہے، پس
تیسرا مکملی ہے

$$لا^۲ + ۱۱ لا + ۱۱ لا^۲ + ۱۱ لا^۱ + ۱۱ لا^۰ = ۰ \text{ جب } لا + ج$$

مشکلہ

- ۱۔ ثابت کرو کہ لا^۲ + ۱۱ لا + ۱۱ لا^۲ + ۱۱ لا^۱ + ۱۱ لا^۰ = ۰ حاضر مساوات ہے، اسے پورے طور پر حل کرو۔
- ۲۔ مساوات ذیل کو حل کرو

- لا^۲ + ۱۱ لا + ۱۱ لا^۲ + ۱۱ لا^۱ + ۱۱ لا^۰ = ۰ جب لا
- ۳۔ ذیل کی مساواتوں کے پہلے مکملی معلوم کرو۔

$$(ا) لا^۲ + ۱۱ لا + ۱۱ لا^۲ + ۱۱ لا^۱ = ۰$$

$$(ب) لا^۲ + ۱۱ لا + ۱۱ لا^۲ - ۱۱ لا^۱ = ۰$$

$$(ج) لا^۲ + ۱۱ لا + ۱۱ لا^۲ + ۱۱ لا^۱ + ۱۱ لا^۰ = ۰ \text{ لوک لا}$$

۴۔ اگر مساوات ف + ۱۱ لا + ۱۱ لا^۲ + ۱۱ لا^۱ = ۰ کا ایک مشکل جزو ضربی

مہ ہو تو ثابت کرو کہ مہ ذیل کی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے

$$ف_۱ مہ - ف_۱ مہ + ف_۱ مہ = ۰$$



باب چہارم

مستقل سروں والی خطی، تفرقی مساواتیں

۲۶۔ عام خطی تفرقی مساوات

ن، دین رتبہ کی عام خطی تفرقی مساوات کی شکل ہے

$$\frac{a_n}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_0}{0!} = 0 \quad (1)$$

یہاں 'ن'، 'ف'، 'ف'، 'ف' اور 'لا' کے معلوم تفاعل ہیں۔
فرض کرو کہ مساوات کا کوئی خاص حل $a = 0$ (لا) ایسے ہی بھانپ
لیا گیا ہے یا کسی طرح سے معلوم کر لیا گیا ہے۔

تب اگر $a = 0$ (لا) + 'می' مساوات میں مندرج کیا جائے تو حاصل

$$\frac{a_n}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_0}{0!} = 0 \quad (2)$$

فرض کرو کہ 'می' = 'می'، 'می' = 'می'، 'می' = 'می' اس مساوات کے حل ہیں

تب ظاہر ہے کہ 'می' = 'می' + 'می' + 'می' + + 'می'

بھی مساوات (۲) کا حل ہے اور اس میں 'ن' مستقل 'می'، 'می'، 'می'، 'می'

شامل ہیں۔

اسلئے $a = 0$ + 'می' + 'می' + 'می' + + 'می' + 'ف' (لا)

مساوات کا ایک ایسا حل ہے جس میں 'ن' مستقل شامل ہیں اور اس لئے

یہ مساوات کا عام سے عام حل ہے، مساوات کا اس سے زیادہ عام حل نہیں معلوم کیا گیا۔

اس کا حصہ ف (لا) خاص تکمیلی (خ، ک) کہلاتا ہے اور

اس کے باقی ماندہ حصہ کو جس میں ف مستقل شامل ہیں متم تفاعل (م، ت) کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ متم تفاعل اس مساوات کا حل ہے جو اصلی مساوات میں باقی رکن کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر یہ دونوں حل معلوم ہو جائیں تو مساوات کا پورا حل ان کا مجموعہ ہے۔

۲۷۔ دو مشہور صورتیں دو صورتیں ہیں جن کے حل بالعموم آسانی

سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) جب مقادیر ف، ف، ف، ف سب مستقل ہوں

(۲) جب مساوات مذیل کی شکل اختیار کرے

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \dots + \frac{a_n}{x_n} = 0$$

جہاں $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ مستقل ہیں اور $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ کا کوئی تفاعل ہے۔

آگے چلکر معلوم ہو گا کہ دوسری صورت کا حل ایک ایسی مساوات کے حل پر موقوف ہو سکتا ہے جو پہلی قسم کے تحت میں آتی ہیں۔

مستقل سروں والی مساواتیں۔ متم تفاعل

۲۸۔ سب سے پہلے ہم اس طرح کی مساوات

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = 0 \quad (1)$$

مذکورہ کا عام سے عام حل نہیں رہتا۔
اب ہم اسے زیادہ غور سے دیکھتے ہیں
فرض کرو کہ $m = m_1 + m_2$
تب $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ (۱)

$$= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n}$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} \right) \frac{1}{m}$$

اب چونکہ $\frac{1}{m}$ اور $\frac{1}{m_1}$ دو بے تعلق اختیاری مقداریں ہیں، اس لئے انہیں ہم دو اور بے تعلق اختیاری مقداروں کی رقوم میں دو ربطوں کے ذریعہ جنہیں ہم اختیار کرنا چاہیں بیان کر سکتے ہیں۔

اولاً $\frac{1}{m}$ کو اتنا بڑا مانو کہ بالآخر حاصل ضرب $\frac{1}{m}$ جہاں m لا انتہا کم ہے $\frac{1}{m}$ کے مساوی ہو جو ایک اختیاری محدود مستقل ہے۔

ثانیاً $\frac{1}{m_1}$ کو $\frac{1}{m}$ سے مختلف علامت مانو اور اس کی قیمت اتنی بڑی منتخب کرو کہ $\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}$ ایک اختیاری محدود مستقل $\frac{1}{m}$ کے مساوی ہو
اب رقوم

$$\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1} + \dots + \frac{1}{m_n} \right]$$

m کے معدوم ہونے کی وجہ سے فنا ہو جائیں گی کیونکہ $\frac{1}{m}$ محدود ہے اور مربع خطوط وحنانی کے اندر کا جملہ مستحق ہے اور اس میں $\frac{1}{m}$ بطور جزو ضربی کے شریک ہوتا ہے۔

پس اگر $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ تو رقوم $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$ کی بجائے ہم

$\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$ لکھ سکتے ہیں، اس لئے حل مذکور میں اختیار کیا

مستقلات کی تعداد ۵ ہی رہتی ہے۔ پس اس صورت میں یہ مساوات کا عام حل ہے۔

۳۔ تین اصلیں مساوی اب ہم اس صورت پر غور کرتے ہیں

جبکہ مساوات (۲) کی تین اصلیں مساوی ہوں یعنی $m = m = m$ ۔
 حسب بالا رقوم $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$ کی بجائے ہم

(ب + ب) $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$ رکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $m = m + k$

تب $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + k$ (ب + ب) $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + k$ (.....)

پس $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$ کی بجائے ہم

(ب + ب) $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + k$ (ب + ب) $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + k$

+ $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + k$ [.....]

رکھ سکتے ہیں اور $\frac{1}{2}m$ ، $\frac{1}{2}m$ ، $\frac{1}{2}m$ کو اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ

$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$

$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$

$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$

جہاں ج، ج، ج کوئی اختیاری مستقل ہیں، خواہ ک کچھ ہی ہو

بشرطیکہ یہ صفر مطلق نہ ہو۔ لیکن چونکہ ایک کو ایک محدود مقدار کے مساوی منتخب کیا گیا ہے اور خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستقیم ہے اس لئے ظاہر ہے کہ گنگ کو لا انتہا کم کرنے سے بالآخر اس جملہ کی انتہائی صورت یہ ہوگی (ج + ج + ج لا^۲) و لا^۳۔

۳۔ کئی اصلیں مساوی اس طرح ظاہر ہے کہ اگر مساوات (۲) کی ع اصلیں مساوی ہوں یعنی

$\epsilon = \dots = \mu = \nu = 1$

تو ہمارے حل کی عمومیت میں کسی قسم کا فرق نہیں آئے گا اگر ہم متمم
تفاعل کے متناظر حصہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

کے لئے جملہ (ک + ک + لا + ک + لا + + ک + لا^{ع-۱}) کو لا رکھیں
۳۲۔ تعمیم زیادہ عام طور پر اگر کوئی خطی تفرقی مساوات ہو جس
کے سرخواہ مستقل ہوں یا نہ ہوں اور اس کا متمم تفاضل

$$f_1(m_1) + f_2(m_2) + \dots + f_r(m_r)$$

۳۳۔ خیالی اصلیں اگر دفعہ ۲۸ مساوات (۲) کی ایک اصل خیالی ہو تو یاد رہے کہ حقیقی سروں والی مساواتوں میں خیالی اصولوں کے ہمیشہ جوڑے واقع ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ $م = ل + خ ب$ ، $م = ل - خ ب$ جہاں $خ = ل - ا$

تب رقوم $ل قو لا + ل قو لا$ یا $ل قو لا + ل قو لا$ (دو + خ ب) لا

حقیقی صورت میں اس طرح لائی جاسکتی ہیں:-

$ل قو لا + ل قو لا$ (دو + خ ب) لا

$= ل قو لا (جم ب لا + خ ب ب لا) + ل قو لا (جم ب لا - خ ب ب لا)$

$= (ل + ل) قو لا (جم ب لا + ل - ل) (خ ب ب لا)$

$= ب قو لا (جم ب لا + ب قو لا (جم ب لا$

جہاں $ل + ل$ اور $(ل - ل)$ خ کی بجائے

اختیاری مستقل ب اور ب رکھے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ $ب = د جم ع$ ، $ب = د جب ع$ تب

$د = ب + ب$ اور $ع = مس$ $\frac{ب}{ب}$

$ب جم ب لا + ب جب ب لا = د جم (ب لا - ع)$

پس اس طرح ہم

بہ و لا جم ب لا + بہ و لا جب ب لا کی بجائے

جم و لا جم (ب لا + جم)

رکھ سکتے ہیں جہاں ج، جم اختیاری مستقل ہیں۔

۴۔ مکرر خیالی اصلیں

مکرر خیالی اصلوں کے لئے ہم پہلے کی طرح عمل کر سکتے ہیں کیونکہ یہ ثابت

ہو چکا ہے کہ اگر م = م، تو م و لا + م و لا کی بجائے

(ب + بہ لا) و لا لکھا جاسکتا ہے اور م و لا + م و لا کی بجائے

(بہ + بہ لا) و لا

پھر اگر م = م، = و لا + خ ب اور م = م = و لا - خ ب تو ہم

م و لا + م و لا + م و لا + م و لا

کی بجائے (ب + بہ لا) و لا + (بہ + بہ لا) و لا - خ ب لا

یعنی و لا [(ب + بہ) جم ب لا + (ب - بہ) خ جب ب لا]

+ لا و لا [(بہ + بہ) جم ب لا + (بہ - بہ) خ جب ب لا]

اور اسلئے و لا (ج جم ب لا + ج جب ب لا) + لا و لا (ج جم ب لا + ج جب ب لا)

یعنی $\text{ولا} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جسم ب لا + $\text{ولا} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جسم ب لا
یا دوسری صورت میں $\text{لا} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جسم ب لا + $\text{لا} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جسم ب لا
کہہ سکتے ہیں۔

آخری تین صورتوں میں سے ہر ایک میں چار اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں جو ابتدا کے اختیاری مستقلات لا^2 ، لا ، لا کی بجائے ہیں پس اس صورت میں بھی اختیاری مستقلات کی تعداد (۴) ہی رہتی ہے جو اس حل کو عام سے عام بنانے کے لئے ضروری ہے۔
ظاہر ہے کہ اس قاعدہ کی توسیع اس صورت میں بھی ہو سکتی ہے جبکہ خیالی اصولوں کی کوئی سی تعداد مساوی ہو۔

$$۳۵ - \text{مساوات} \quad \frac{\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲} - ۳ \frac{\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲} + ۲ = ۰ \text{ کو حل کرو}$$

اس جگہ آزمائشی حل $\text{لا} = ۱$ $\text{لا}^۲ = ۱$ ہے، اس کو مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ - ۳ + ۲ = ۰$$

جبکی اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔

پس $\text{لا} = ۱$ $\text{لا}^۲ = ۱$ اور $\text{لا} = ۱$ $\text{لا}^۲ = ۱$ دونوں خاص حل ہیں اور

$$\text{لا} = ۱ \text{ لا}^۲ + ۱ \text{ لا}^۲ = ۰$$

عام حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں۔

$$\text{مثال ۲ - حل کرو} \quad \frac{\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲} - \text{لا} = ۰ \text{ کو}$$

یہاں ابتدائی مساوات $\text{لا} = ۱$ ہے اور اس کی اصلیں $\text{لا} = ۱$ اور $\text{لا} = ۱$ ہیں۔

اور عام حل ہے $ما = لا + فو - لا$

اور اگر ضرورت ہو تو اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$ما = بب + جمر لا + بب + جمر لا$

جہاں $لا$ کی بجائے $بب + بب$ اور $لا$ کی بجائے $بب - بب$ لکھا گیا ہے

مثال ۳ - $\frac{مر لا}{مر لا} + لا ما =$ کو حل کرو

یہاں ابتدائی مساوات $ما + لا =$ کی اصلیں $م = لا + لا$ ہیں

اور عام حل ہے $ما = لا + جمر لا + لا$ جب $لا$

یا دوسری صورت میں $ما = بب + جمر (لا + بب)$

مثال ۴ - $\frac{مر لا}{مر لا} - \frac{مر لا}{مر لا} + \frac{مر لا}{مر لا} = ۲$

یا (عف - ۱) (عف - ۲) = ۰ جہاں $\frac{مر لا}{مر لا}$ کی بجائے عف

لکھا گیا ہے۔

ابتدائی مساوات ہے $ما - مر + مر + مر = ۲$ ۔
یا $(م - ۱)(م - ۲) = ۰$ یعنی اصلیں ۱، ۲ ہیں

پس عام حل ہے $ما = (لا + لا) (لا + لا)$

مثال ۵ - $(عف + ۱)(عف - ۱) = ۰$

ابتدائی مساوات ہے $(م + ۱)(م - ۱) = ۰$

جس کی اصلیں ± ۱ ہیں، اس لئے عام حل ہے

$ما = لا + جمر لا + لا + جمر لا$

$$یا م = ب + جم (لا + بی) + ل + قو$$

مثال ۶۔ حل کرو (عف + عف + ۱) (عف - ۲) م = ۰۔ کو

امدادی مساوات ہے (م + م + ۱) (م - ۲) = ۰۔

اور اس کی اصلیں ہیں - $\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \sqrt{3}$ اور ۲، اس لئے عام حل ہے

$$م = ل + قو \frac{1}{4} + جم \frac{لا + بی}{۲} + ل + قو \frac{3}{۲} جب لا + بی + ل + قو \frac{3}{۲}$$

$$یا م = ب + قو \frac{1}{4} + جم (لا + بی) + ل + قو$$

مثال ۷۔ (عف + عف + ۱) (عف - ۲) (عف - ۵) م = ۰۔ کو حل کرو
صریحا اس کا عام حل ہے

$$م = (ل + ل + لا) قو \frac{1}{4} + جم \frac{لا + بی}{۲} + (ل + ل + لا) قو \frac{3}{۲} جب لا + بی + ل + قو \frac{3}{۲}$$

$$+ (ل + ل + لا + ل + لا) قو \frac{۲}{۵} + ل + قو \frac{۵}{۵}$$

جس میں آٹھ اختیاری مستقل شامل ہیں۔

مثلاً

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$۱۔ \frac{۲}{۳} م - (ل + ب) \frac{۲}{۳} م + ل + ب م = ۰$$

$$۲۔ \frac{۲}{۳} م - ل + \frac{۲}{۳} م + ۱۱ \frac{۲}{۳} م - ل + ۶ م = ۰$$

$$۳۔ \frac{۲}{۳} م - ۹ \frac{۲}{۳} م + ۲۳ \frac{۲}{۳} م - ۱۵ م = ۰$$

۳۷۔ "عف" جبر و مقابلہ کے اساسی اصولوں کو پورا کرتا ہے
تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ عامل عف

(یعنی $\frac{م}{و}$) قوانین ذیل کو پورا کرتا ہے

(۱) جبر و مقابلہ کا تقیسی قانون یعنی

$$\text{عف} (م + و + ه + ...) = \text{عف} م + \text{عف} و + \text{عف} ه + ...$$

(۲) قانون مبادلہ صرف بمحاذ مستعملوں کے یعنی

$$\text{عف} (ج م) = (ج عف م)$$

(۳) قانون قوت نما یعنی

$$\text{عف}^۲ م = \text{عف} م + \text{عف} م$$

جہاں م، ن، ہشت صحیح ہیں۔
پس رمز یا علامت عف جبریہ مقادیر کی باہمی ترکیب کے تمام
ابتدائی قوانین کو پورا کرتی ہے صرف متغیر مقداروں کے ساتھ اس
کا تبادلہ نہیں ہو سکتا۔

پس معلوم ہوا کہ کسی منطوق جبریہ تماشل کے جواب میں عاملوں
کا بھی ایک متناظر تماشل ہو گا مثلاً مسئلہ ثنائی کی رو سے

$$(۴ + ۱) = م + و + ه + ... + \frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱} + م^{۲-ن} + ... + و^{۲-ن}$$

اور ایسے ہی بغیر فرید ثبوت کے عاملوں کے لئے متناظر مسئلہ کی رو سے

$$(\text{عف} + ۱) = م + \text{عف} + و + ه + ... + \frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱} + \text{عف}^{۲-ن} + ... + و^{۲-ن}$$

$$= \text{عف} م + و + ه + ... + \frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱} + \text{عف}^{۲-ن} م + ... + و^{۲-ن} م$$

۳۸۔ عل ف (عف) ءولا
تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر مثبت صحیح ہو تو
 $\text{عف ءولا} = \text{ءولا ءولا}$

فرض کرو کہ عل عف ءولا ایسا ہے کہ
 $\text{عف عف ءولا} = \text{ی}$
اس تعریف کے مطابق عف ءولا عمل تکمل کو تعبیر کرتا ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ عل عف ءولا ہی میں کسی اختیاری مستقل کا اضافہ نہیں ہوتا (کیونکہ یہاں ہمیں صرف ایک خاص تکمل کی تلاش ہے نہ کہ عام سے عام تکمل کی)

اب چونکہ $\text{عف ءولا} = \text{ءولا ءولا} = \text{عف عف ءولا}$

اس سے ظاہر ہے کہ $\text{عف ءولا} = \text{ءولا ءولا}$
اس لئے ظاہر ہے کہ ن کی تمام مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے
 $\text{عف ءولا} = \text{ءولا ءولا}$

۳۹۔ فرض کرو کہ $\text{ف (سی) کوئی جملہ سی کا ہے جو ی کی مثبت یا منفی صحیح قوتوں میں (= ح ءولا سی ءولا جہاں ءولا ایک مستقل ہے اور سی پر منحصر نہیں ہے) پھیل سکتا ہے}$

تب $\text{ف (عف) ءولا} = (\text{ح ءولا عف}) ءولا$

$= (\text{ح ءولا عف ءولا})$

$= (\text{ح ءولا ءولا})$

عمل ف (عف) کو لا کا جو حاصل ہے وہ عف کی بجائے لا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{\text{عف}^2 + \text{عف} + 1}$ کو لا کی قیمت معلوم کرو۔

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے

$$\frac{1}{1+2+3+4} \text{ کو لا } \frac{1}{15}$$

مثال ۲۔ $\frac{1}{\text{عف} + 1}$ کو لا کی قیمت معلوم کرو

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے $\frac{1}{4 \times 2 \times 5} \text{ کو لا } \frac{2}{105}$

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$(۱) \frac{1}{\text{عف} + 1} \text{ کو لا } (۲) \frac{1}{(\text{عف} + ۱)(\text{عف} + ۲)}$$

$$(۳) \frac{1}{(\text{عف} + ۲)(\text{عف} + ۳)(\text{عف} + ۴)} \text{ جز لا}$$

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{عف} + ۱} = \frac{1}{\text{عف} + ۱} + \frac{1}{\text{عف} + ۲} - \frac{1}{\text{عف} + ۳}$

۳۔ ذیل کے نتائج ثابت کرنے میں دفعہ ۳۹ کو استعمال نہ کرو

ف (عف) جب م لا = ف (م) جب م لا

ف (عف) جب م لا = ف (م) جب م لا

ف (عف) جہنم لا = ف (م) جہنم لا

۴۰۔ عمل ف (عف) و لا

فرض کرو کہ ما = ω ما، جہاں ما، لا کا تفاعل ہے۔

تب چونکہ عفو = ۱/۱۰

اس لئے یلب نیز کے مسئلہ کی رو سے

ماي = فو^(١) (و ما + ج و اعف^(٢) ما + ج و اعف^(٣) ما + + عفا^(٤) ما)

جسے مسئلہ ثنائی کی طرح لکھنے سے حاصل ہوتا ہے [دفعہ ۳۷]

عفت فولا ما = فولا (عفت + ا) فولا ما

جہاں بن مثبت صحیح ہے۔

اب فرض کرو کہ (عق + و) = ما = لا

جے ہم لکھ سکتے ہیں ما = (عفا + و) ^۷ لا

تب چونکہ عفو و لا ما = فو (عفو + و) ما

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x (1) = e^x = y$$

اس لئے عَفَّ = فَوَّ (عَفَّ + ا) = فَوَّ

اس لئے تمام صورتوں میں ن کی مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے

$$\text{عف}^{\text{ن}} \text{و لا} \text{لا} = \text{و لا} (\text{عف} + 1) \text{لا}$$

۴۱۔ جیسا دفعہ ۳۹ میں ہم نے دیکھا

$$ف (عف) \text{ و } لا = \text{ و } لا (عف) \text{ و } لا$$

$$= \text{ و } لا (عف) \text{ و } لا$$

$$= \text{ و } لا (عف + و) \text{ و } لا$$

$$= \text{ و } لا (عف + و) \text{ و } لا$$

یعنی و لا کو ہم عامل ف (عف) کے بائیں جانب سے دائیں جانب لاسکتے ہیں بشرطیکہ ہم عف کی بجائے عف + و لکھیں۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{(عف-۱)} \text{ و } لا = \text{ و } لا \frac{1}{(عف-۱)} = \text{ و } لا \frac{1}{۳ \times ۳ \times ۲}$

مثال ۲۔ $\frac{1}{(عف-۲) (عف+۳)} \text{ و } لا = \text{ و } لا \frac{1}{(عف-۲)} \text{ جب } لا = \text{ و } لا \text{ جب } لا$

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{1}{(عف-۱)} \text{ و } لا، \frac{1}{(عف-۱)} \text{ و } لا، \frac{1}{(عف-۱)} \text{ و } لا$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{(عف+۱) (عف+۲)} = \frac{1}{(عف+۱) (عف+۲)} \text{ و } لا$$

۴۲۔ عمل ف (عف) جب م لا

$$\text{عفا}^1 \text{ جب } م \text{ لا} = (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

اور اس لئے عفا^۲ جب م لا = (-م^۲) جب م لا
اس لئے حسب سابق (دفعات ۳۹، ۴۱) معلوم ہوگا کہ

$$ت (\text{عفا}^1) \text{ جب } م \text{ لا} = ت (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

مثال ۴۱: $\frac{دولا}{دولا + ب^2} = \frac{عفا^1 - عفا^2}{عفا^1 - عفا^2}$ جب ب لا [دفعہ ۴۲]

$$= \frac{عفا^1 - عفا^2}{عفا^1 - عفا^2} \text{ جب ب لا}$$

$$= \frac{دولا}{دولا + ب^2} (عفا^1 - عفا^2) \text{ جب ب لا [دفعہ ۴۲]}$$

$$= \frac{دولا}{دولا + ب^2} \text{ جب ب لا} = \frac{دولا}{دولا + ب^2} \text{ جب ب لا}$$

یہی (۱)

امثلہ

۱۔ اس طریقہ سے جملات ذیل کے تکمیلی معلوم کرو

دولا جب ب لا، دولا جب لا، دولا جب لا، جب ب لا

۲۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{عفا^1}{عفا^2 + ۲} \text{ جب } ۲ \text{ لا، } \frac{۱}{عفا^1 + ۱} \text{ جب } لا، \frac{عفا^2 + ۱}{عفا^2 + ۱} \text{ جب } ۲ \text{ لا}$$

۳۔ جیب اور جیب التمام کی قوت ثنائی قیمتوں کے ذریعہ اعمال
ف (عفا) جب م لا، ت (عفا) جب م لا کے نتائج حاصل کرو۔

$$۴۳ - \text{عمل } \frac{۱}{\text{ف (دعف)}} \text{ جب م لا}$$

اب ہم عمل $\frac{۱}{\text{ف (دعف)}}$ جب م لا پر غور کریں گے جہاں ف (دی) ایک ایسا تفاعل سی کا ہے کہ اسے ہم سی کی مثبت صحیح قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف (دعف) کو عف کی قوتوں میں پھیلا یا گیا ہے اب اگر پھیلاؤ میں طاق قوتیں شریک نہ ہوں تو دفعہ ماقبل کے قاعدہ کی رو سے اوپر کے عمل کا نتیجہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے۔

مثلاً $\frac{۱}{\text{ا + عف}^۱ + \text{عف}^۲} \text{ جب م لا} = \frac{۱}{۶۴ - ۱۶ + ۴ - ۱} \text{ جب م لا} = \frac{۱}{۵۰} \text{ جب م لا}$
لیکن اگر ہر دو طاق اور جفت قوتیں شریک ہوں تو اس طرح عمل ہو سکتا ہے جفت قوتوں کو الگ اور طاق قوتوں کو الگ اکٹھا کرو اور عمل مذکور کو اس طرح لکھو

$$\frac{۱}{\text{ف (دعف)}} \text{ جب م لا} = \frac{۱}{\text{ف (دعف)}^۱ + \text{عف}^۱ \text{ ف (دعف)}^۲} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{ف (دعف)}^۱ - \text{عف}^۱ \text{ ف (دعف)}^۲}{\text{ف (دعف)}^۱ [\text{ف (دعف)}^۱ - \text{عف}^۱] + \text{ف (دعف)}^۲ [\text{ف (دعف)}^۱ - \text{عف}^۱]} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{ف (دعف)}^۱ - \text{عف}^۱ \text{ ف (دعف)}^۲}{\text{ف (دعف)}^۱ [\text{ف (دعف)}^۱ - \text{عف}^۱] + \text{ف (دعف)}^۲ [\text{ف (دعف)}^۱ - \text{عف}^۱]} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{ف (دعف)}^۱ - \text{عف}^۱ \text{ ف (دعف)}^۲}{\text{ف (دعف)}^۱ [\text{ف (دعف)}^۱ - \text{عف}^۱] + \text{ف (دعف)}^۲ [\text{ف (دعف)}^۱ - \text{عف}^۱]} \text{ جب م لا}$$

بقیہ دیکھتے سے معلوم ہوگا کہ عملی طور پر عفا کی بجائے - م فوراً اس منزل
 فہ (عفا^۱) + عفا (فا) (عفا^۲) جب م لا کے بعد لکھ سکتے
 ہیں یعنی اوپر کے جملہ کی بجائے

$$\text{جب م لا} \quad \frac{1}{\text{فہ} (-\text{م}) + \text{عفا} (\text{فا} - \text{م})}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{فہ} (-\text{م}) - \text{عفا} (\text{فا} - \text{م})}{\text{فہ} (-\text{م}) - \text{عفا}^2 [\text{فا} (-\text{م})]} \quad \text{جب م لا وغیرہ}$$

فوراً لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱۔} \quad \frac{1}{\text{عفا}^3 + \text{عفا}^2 + \text{عفا} + 1} \quad \text{جب ۲ لا کی قیمت}$$

معلوم کرو۔

$$\text{یہ ہے} \quad \frac{1}{\text{عفا}^2 + 1 + \text{عفا} (\text{عفا} + 1)} \quad \text{جب ۲ لا}$$

$$\text{یا} \quad \frac{1}{3 - (\text{عفا} + 1)} \quad \text{جب ۲ لا}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{عفا} - 1}{3 - (\text{عفا} - 1)} \quad \text{جب ۲ لا}$$

$$\text{یا} \quad \frac{(\text{عفا} - 1)}{15} \quad \text{جب ۲ لا}$$

$$\text{یا} \quad \frac{1}{15} \quad \text{جم ۲ لا} - \frac{1}{15} \quad \text{جب ۲ لا}$$

$$\text{مثال ۲۔} \quad \frac{1}{3(\text{عفا} - 1)} \quad \text{و لا جم لا کی قیمت حاصل کرو}$$

$$\text{یہ جملہ} = \frac{1}{(عف + ۱)^۳} \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{عف + ۳ + ۳عف + ۱} \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{عف - ۳ + ۳ + ۱} \text{جم لا} [عف کی بجائے - ۱]$$

$$= \frac{1}{عف - ۱} \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{عف - ۱} \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{عف + ۱} \text{جم لا} - \frac{1}{عف - ۱} \text{جم لا} = \frac{2}{عف^۲ - ۱}$$

مثلاً

۱۔ جملات ذیل پر مندرجہ ذیل عمل کرو۔

$$\frac{عف}{عف - ۱} \text{و جب لا} \frac{عف^۳}{(عف - ۱)(عف - ۲)}$$

$$\frac{1}{عف - ۱} \text{و جب لا} \frac{1}{عف + ۱}$$

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{(عف + ۱)^۳} = \frac{1}{عف + ۳} - \frac{1}{عف + ۱} + \frac{1}{عف - ۱}$ جہاں ن تکلی علامتیں ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{(د ی)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے سے

عمل $\frac{1}{\text{ق (عف)}}$ و معمولی تکملوں کے حاصل جمع کی صورت میں بیان ہو سکتا ہے۔

۴۴۔ عامل $\frac{1}{\text{ق (عف)}}$ و جہاں و مقدار جبریہ ہے۔

اگر عمل $\frac{1}{\text{ق (عف)}}$ و میں و متغیر لا کا ایک جبریہ،

منطقاً صحیح تفاعل ہو تو ہم $\frac{1}{\text{ق (عف)}}$ کو کسی نہ کسی طریقہ سے عف کی صعودی قوتوں میں اس حد تک پھیلا سکتے ہیں کہ عف کا قوت نما و میں لا کی بڑی سے بڑی قوت کے مساوی ہو۔

مثال ۱۔ مثلاً مطوم کرو $\frac{1}{1 + \text{عف} + \text{عف}^2} (1 + \text{لا} + \text{لا}^2)$

$$\text{یہ جملہ} = \frac{1 - \text{عف}}{1 - \text{عف}^3} (1 + \text{لا} + \text{لا}^2)$$

$$= (1 - \text{عف} + \text{عف}^2 - \text{عف}^3 + \dots) (1 + \text{لا} + \text{لا}^2)$$

$$= (1 + \text{لا} + \text{لا}^2) - (1 + \text{لا}^2) = \text{لا}$$

مثال ۲۔ نیز $\frac{1}{1 + \text{عف}^2 + \text{عف}^3 + \text{عف}^4} \text{لا}^3$ کی قیمت دریافت کرو

$$\text{جملہ} = \frac{\text{لا}^3}{1 + \text{عف} + \text{عف}^2 + \text{عف}^3 + \text{عف}^4 + \text{عف}^5 + \text{عف}^6 + \text{عف}^7 + \text{عف}^8 + \text{عف}^9 + \text{عف}^{10} + \dots}$$

$$= \frac{\text{لا}^3}{1 + \text{عف} + \text{عف}^2 + \text{عف}^3 + \text{عف}^4 + \text{عف}^5 + \text{عف}^6 + \text{عف}^7 + \text{عف}^8 + \text{عف}^9 + \text{عف}^{10} + \dots}$$

$$= \frac{\text{لا}^3}{1 + \frac{\text{عف}}{1} + \frac{\text{عف}^2}{1} + \frac{\text{عف}^3}{1} + \frac{\text{عف}^4}{1} + \frac{\text{عف}^5}{1} + \frac{\text{عف}^6}{1} + \frac{\text{عف}^7}{1} + \frac{\text{عف}^8}{1} + \frac{\text{عف}^9}{1} + \frac{\text{عف}^{10}}{1} + \dots}$$

$$\frac{۱}{۱۰} = (۱ - \frac{۸}{۵} + \frac{۲۹}{۲۵} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰} + \dots) \frac{۱}{۱۰}$$

$$\frac{۱}{۱۰} = (\frac{۱}{۱۰} - \frac{۸}{۵} + \frac{۲۹}{۲۵} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰} + \dots) \frac{۱}{۱۰}$$

مثلاً

ذیل کے عمل کرو۔

$$۱ - \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)} = \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)} - \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)} = \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)}$$

$$۲ - \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)} = \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)} - \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)} = \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)}$$

$$۳ - \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)} = \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)} - \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)} = \frac{۱}{(۱+۲)(۱+۲)}$$

۴۵۔ ایسی صورتیں جن میں یہ طریقے ناکام رہتے ہیں۔
خاص تکلی حاصل کرنے کے جو طریقے اوپر درج کئے گئے ہیں انہیں استعمال کرنے میں اکثر اوقات کئی صورتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جہاں یہ طریقے کامیاب نہیں ہو سکتے، اب ہم یہ بتانے کی کوشش کرتے ہیں کہ ایسی حالتوں میں طرز عمل کیا ہونا چاہئے۔

$$۴۶۔ مساوات $\frac{۱}{۱-۲} = ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + \dots$ کو حل کرو$$

متم تفاعل ۱ کو ہے۔

خاص تکلی حاصل کرنے کے لئے $\frac{۱}{۱-۲}$ کی قیمت معلوم ہونی

چاہئے۔ اگر ہم دفعہ ۳۹ کا قاعدہ استعمال کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۱-۲} = ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + \dots$$

اس شکل سے بچنے کے لئے ہم دفعہ ۴ کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں جس سے حال ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{عف}} = 1 = \frac{1}{\text{لا}} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$$

جو مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

ایک اور طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ہم عمل $\frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$ کا بغور معائنہ کرتے ہیں۔

لا کی بجائے لا (۱+ھ) کہنے سے

$$\frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{ہا}} = \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} \cdot \frac{1}{\text{ہا}} = \frac{1}{\text{عف}-1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} \cdot \frac{1}{\text{ہا}}$$

$$= \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \frac{1}{\text{فو}} (1 + \text{ھ} + \text{لا} + \frac{\text{ھ}^2}{2} + \frac{\text{ھ}^3}{3} + \dots)$$

$$= \frac{1}{\text{ہا}} \cdot \left[\frac{1}{\text{فو}} + \frac{\text{لا}}{\text{فو}} + \frac{\text{ھ}}{\text{فو}} + \frac{\text{ھ}^2}{2\text{فو}} + \frac{\text{ھ}^3}{3\text{فو}} + \dots \right]$$

اس جملہ میں سے حصہ ہا $\frac{1}{\text{فو}}$ لا متناہی ہو جاتا ہے لیکن اسے

ہم متمم تفاعل $\frac{1}{\text{فو}}$ کے ساتھ لے سکتے ہیں اور چونکہ $\frac{1}{\text{فو}}$ کی قیمت اختیاری ہے اس لئے ہم $\frac{1}{\text{فو}}$ کو ایک نیا اختیاری مستقل ب تصور کرتے ہیں کیونکہ $\frac{1}{\text{فو}}$ کا ایک حصہ منفی اور غیر متناہی فرض کیا جاسکتا ہے جو رقم $\frac{1}{\text{فو}}$ کا توازن کر دے گا۔

پس لا $\frac{1}{\text{فو}}$ مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

باقی رقموں میں ھ شریک ہوتا ہے جو ھ کے لا انتہا کم ہونے سے معدوم ہو جاتی ہیں۔

پس مساوات کا پورا حل $\frac{1}{\text{فو}} + \frac{1}{\text{لا}} = 1$ ہے۔

یعنی $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$... لا میں

یعنی $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$ (لا + $\frac{3}{2}x$) میں

یعنی $\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^2 + 1} \right)$ لا میں

پس خاص تکلی ہے $\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2 - 1}$ لا جب لا

اور پورا حل ہے

ما = $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^2 + 1}$ لا جب لا

مشکلہ

۱۔ مندرجہ ذیل کے خاص تکلی حاصل کرو

(۱) $\frac{1}{x^2 + 1}$ جب لا (۲) $\frac{1}{x^2 + 1}$ جم ۲ لا

(۳) $\frac{1}{x^2 - 1}$ جب لا (۴) $\frac{1}{x^2 - 1}$ لا

(۵) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ لا (۶) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ جب لا

(۷) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ (لا + جم ۲ لا)

(۸) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ جم ۲ لا جم ۳ لا

۲۔ ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$یا (عفا - عفا^۲ + عفا^۳ - عفا^۴) = ما = فو^۲ + فو^۴$$

$$\text{یعنی (عفا - ۱) (عفا + ۱) (عفا^۲ + ۱) = ما = فو^۲ + فو^۴}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = لا فو^۲ + ب جم ت ۱۳ + ج جب ت ۱۳ + فو^۴ + فو^۴$$

$$یا ما = لا + ب جم (۱۳ لوک لا) + ج جب (۱۳ لوک لا) + لا^۲ + لا^۴$$

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$۱۔ لا^۲ فر لا^۲ + لا فر ما + ق^۲ ما =$$

$$۲۔ لا^۲ فر لا^۲ + لا فر ما + ق^۲ ما = (لوک لا) + لا جب لوک لا + جب ق لوک لا$$

$$۳۔ لا^۲ فر لا^۲ + لا^۳ فر لا^۲ + لا فر ما + ما = لا + لوک لا$$

$$۴۔ لا^۳ فر لا^۲ + لا^۲ فر لا^۲ - لا فر ما + ما = لا + لا^۳$$

$$۵۔ (۱ + ب لا) فر ما + ب (۱ + ب لا) فر ما + ق^۲ ما =$$



باب پنجم

قائم مریات، متفرق مساواتیں قائم مری

۴۸۔ کا ریٹرنی مساواتیں۔ مساوات ف (لا، ما، ل) =۔ منحنیات کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اب سوال زیر بحث یہ ہے کہ اگر منحنیات کے ایک قبیل کی مساوات دی ہوئی ہو تو ہم ایک ایسے قبیل منحنیات کی مساوات معلوم کریں جس کا ہر ایک رکن پہلے قبیل کے ہر ایک رکن کو علی القوائم قطع کرے۔ جیسا پہلے بتایا گیا ہے ایسے سوالات میں ضروری ہے کہ پہلے قبیل کے تمام رکنوں پر ایک ساتھ عمل کیا جائے، اس لحاظ سے مخصوص کرنے والا مستقل ل اس قبیل کی مساوات میں شریک نہیں ہونا چاہئے، دفعہ ۲ میں بتایا گیا ہے کہ ل ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ ساقط ہو سکتا ہے

$$ف (لا، ما، ل) =۔$$

$$جف ف لا + \frac{جف ف}{جف ما} \times \frac{ف ما}{ف لا} =۔$$

$$فرض کرو کہ یہ حاصل اسقاط ف (لا، ما، ل) =۔$$

ہے پس یہ پہلے قبیل کی تفرقی مساوات ہے۔

اب جہاں پہلے نظام کا ایک رکن دوسرے نظام کے ایک رکن کو

قطع کرتا ہے اس نقطہ پر ان دو منحنیات کے تماس علی القوائم ہیں۔
پس اگر اس نقطہ تقاطع کے رواں محدود بلحاظ دوسرے قبیل کے منحنی کے
ضامہ اور اگر اسی نقطہ کو پہلے قبیل کے مذکورہ منحنی پر خیال کیا جائے
اور اس کے لحاظ سے اس کے رواں محدود لا، ما ہوں تو

$$\text{ضامہ} = \text{لا، ما} = \frac{\text{مرحہ}}{\text{مرضہ}} = - \frac{\text{مرلا}}{\text{مرہ}}$$

اس لئے دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{وہ (ضامہ، ما،) = } \frac{\text{مرضہ}}{\text{مرہ}} = -$$

اور اس کو تکمیل کرنے سے پہلے نظام کے قائم مریات کا قبیل حاصل ہوگا۔
اس لئے قاعدہ یہ ہے۔

مساوات معلومہ کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو پھر $\frac{\text{مرہ}}{\text{مرلا}}$ کی بجائے
- $\frac{\text{مرلا}}{\text{مرہ}}$ لکھو اور تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔

۴۹۔ قطبی مساواتیں۔ اگر منحنی کی مساوات قطبی محدودوں میں دی ہوئی ہو

تو وہ ناویہ جو سمتی نیم قطر تماس کے ساتھ بنانا ہے $\frac{\text{مرطہ}}{\text{مرر}}$ ہوگا،
اس صورت میں قاعدہ مذکورہ یہ ہوگا۔

مساوات کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو پھر $\frac{\text{مرطہ}}{\text{مرر}}$ کی

بجائے - $\frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{مرر}}{\text{مرطہ}}$ لکھ کر نئی تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔

۵۰۔ دائروں کے قبیل $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۱۲ \text{ لا} \dots \dots (۱)$
کا ہر رکن محور ما کو مبدأ پر مس کرتا ہے، اس قبیل کے قائم مریات

کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $لا + ما = \frac{ما}{فر لا} = ۱$

اور ۱ کو ساقط کرنے سے $لا^۲ + ما^۲ = ۲ لا (لا + ما) \frac{ما}{فر لا}$

یعنی $لا^۲ + ۲ لا ما \frac{ما}{فر لا} - ما^۲ = ۰ \dots \dots \dots (۲)$

اس لئے نئی تفرقی مساوات ہوگی

$لا^۲ - ۲ لا ما \frac{ما}{فر ما} - ما^۲ = ۰$

یا $ما^۲ + ۲ لا ما \frac{فر لا}{فر ما} - لا^۲ = ۰$

جو ایک متجانس مساوات ہے اور اس میں $ما = ۰$ و $لا$ رکھنے سے اس کے متغیر الگ ہو سکتے ہیں۔

مگر چونکہ اس مساوات اور مساوات (۲) میں صرف اتنا فرق ہے کہ $لا$ ، $ما$ کا باہم تبادلہ کر دیا گیا ہے، اس لئے اس کا تکسلی ہوگا

$ما^۲ + لا^۲ = ۲ ما لا$

جو دائروں کا ایک اور نظام ہے جس کا ہر ایک رکن محور کا کو مبدأ پر مس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ منحیات $\frac{لا^۲}{لا + لا} + \frac{ما^۲}{ما + ما} = ۱ \dots \dots \dots (۱)$

کے قائم مربعات کا نظام معلوم کرو جہاں $لا$ اس قبیل کا متبدل ہے۔

یہاں $\frac{لا}{لا + لا} + \frac{ما}{ما + ما} = ۰ \dots \dots \dots (۲)$

اور ان دو مساواتوں سے $لا$ کو ساقط کرنا چاہئے۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے لا (ب' + ل) + ما (ل + ل) =

$$\frac{\text{ب' لا} + \text{لا ما}}{\text{لا} + \text{لا}} = \text{ل}$$

$$\frac{\text{لا (ب' - ل)}}{\text{لا} + \text{لا}} = \text{ل + ل}$$

$$\frac{\text{لا (ب' - ل)}}{\text{لا} + \text{لا}} = \text{ل + ل}$$

پس اس قبیل کی تفرقی مساوات ہے

$$1 = \frac{\text{لا (لا + ما)}}{\text{لا (ب' - ل)}} - \frac{\text{ما (لا + ما)}}{\text{لا (ب' - ل)}}$$

$$\text{لا - ما + لا ما} = \left(\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{ما}}\right) = \text{ب' - ل} \dots \dots (۳)$$

اس لئے ما کی بجائے $\frac{1}{\text{ما}}$ لکھنے سے مطلوبہ مریات کے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{لا - ما + لا ما} = \left(\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ما}}\right) = \text{ب' - ل} \dots \dots (۴)$$

لیکن چونکہ اس میں اور مساوات (۳) میں کوئی فرق نہیں ہے اس لئے اس کا تکمیل بھی دہی ہوگا

$$1 = \frac{\text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

جو ایسی مخروطی تراشوں کا ایک نظام ہے جو پہلے نظام کے ساتھ ہم

مساکتہ ہیں۔ اس کی مختلف قیمتوں کے لئے صنوبری خطوط کے قبیل

مثال ۳۔ ل (۱- جم طہ) کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $\frac{مرط}{مرط} = ر جب ط$
اور ر کو ساقل کرنے سے

$ر = \frac{مرط}{مرط} = \frac{۱ - جمط}{جب ط} = مس \frac{ط}{۲}$
اس لئے قائم مریات کے قبیل کے لئے

$$- \frac{۱}{ر} = \frac{مرط}{مس ط}$$

یا لوک ر = ۲ لوک جم ط + مستقل

یا ر = ب (۱ + جم ط)

جو ہم محور صنوبری خطوط کا ایک اور قبیل ہے جن کے قروں کا رخ متقابل سمت میں ہے۔

امثلہ

۱۔ اکی مختلف قیمتوں کے لئے مکافات $ما' = ۲$ و لا کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ م کی مختلف قیمتوں کے لئے متناہ ناقصوں کے

$$قبیل لا' = \frac{لا'}{ب'} + \frac{ما'}{۲} = م' کے قائم مریات کا نظام$$

لا' = ۱ ما' ہے۔

۳۔ اکی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی الزاویہ لوبیوں

کے قبیل ر = ۱ و ط م ع کے قائم مریات معلوم کرو۔

۴۔ اکی مختلف قیمتوں کے لئے ہم محور اور ہم ماسک مکانیوں

$$ر = \frac{۱}{۲} = ۱ + جم ط کے قائم مریات کا قبیل معلوم کرو۔$$

۵۔ ثابت کرو کہ منحنیات کے قبیل

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ - ۳ لا ۱ = ۱ \\ ۳ لا ۱ - ۲ = ۲ ب \end{array} \right.$$

علی القوائم ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنیات رجب اعد = ۱ (جم طہ - جم عہ)
اور رجب زہ = ۱ (جنبرہ - جم طہ)

علی القوائم ہیں۔

۷۔ اگر ف (لا + خ ما) = می + نخ و تو ثابت کرو کہ

$$می = ۱ اور و = ب$$

قائم منحنیات کے دو نظام ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مہ کی کسی مستقل قیمت کے لئے منحنیات کا قبیل

قبیل مہ مخر لا - قمر لا جم ما = مستقل کے منحنیات کو علی القوائم
قطع کرتا ہے۔ [ننڈن ۱۸۹۰ء]

علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں

$$۵۔ مساوات \frac{فری}{فرط} + می = ف (ی)$$

ایک ایسے ذرہ کی حرکت گئی عام مساوات ہے جو ایک مرکزی قوت کے
زیر اثر حرکت کر رہا ہو۔

$$۲ \frac{فری}{فرط} کے ساتھ ضرب دینے اور مکمل کرنے سے$$

$$\left(\frac{فری}{فرط} \right)^۲ + می^۲ = ۲ ف (ی) + ۱$$

جے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں $\int \frac{مری}{(۲+۱) ف (ی) - ی} = ط + ب$
 اس طرح حل عمل میں آسکتا ہے۔

۵۲۔ $\frac{مری}{مرط} + ن ی = ف (ط) (مستقل سروں والی)$
 ایک خطی مساوات ہے، ایسی مساواتوں پر پہلے بحث ہو چکی ہے
 ان کا حل اس طرح بھی عمل میں آسکتا ہے۔
 جب ن ط کے ساتھ ضرب دو جو مشکل جزو ضربی ہے
 تکمیل کرنے سے

جب ن ط $\frac{مری}{مرط} - ن ی$ جم ن ط = $ف (ط) (جب ن ط مرط -)$
 اسی طرح جم ن ط مستعمل جزو ضربی ہے اور اس کے جواب
 میں پہلا تکمیل

جم ن ط $\frac{مری}{مرط} + ن ی$ جب ن ط = $ف (ط) (جم ن ط مرط +)$
 $\frac{مری}{مرط}$ کو ساقط کرنے سے

ن ی = $ف (ط) (جب ن ط - ط - مرط + ب جب ن ط)$
 - $جم ن ط$

۵۳۔ ایک ایسے جسم کی مساوات حرکت جس کی کمیت بدلتی ہو
 اکثر یہ صورت اختیار کرتی ہے

$$مرت = \{ ف (لا) \frac{مرت}{مرت} \} = سا (لا)$$

اور اس کا مکمل جزو ضربی فہ (لا) $\frac{فرلا}{فرت}$ ہے۔

کیونکہ فہ (لا) $\frac{فرلا}{فرت}$ $\frac{فرلا}{فرت}$ {فہ (لا) $\frac{فرلا}{فرت}$ } = سا (لا) فہ (لا) $\frac{فرلا}{فرت}$
 جس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{۲}$ {فہ (لا) $\frac{فرلا}{فرت}$ } = سا (لا) فہ (لا) $\frac{فرلا}{فرت}$

$$\text{یا } \frac{1}{۲} \sqrt{\frac{\text{فہ (لا) فرلا}}{\text{سا (لا) فہ (لا) فرلا + ۱}}} = \text{فرت}$$

متغیر پیدا ہو گئے ہیں، پس حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے۔

مزید توضیحی مثالیں

۵۴۔ کئی مساواتوں کو خاص ترکیبوں سے اوپر کی کسی نہ کسی میاری صورت میں تحویل کرنے سے حل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ $\frac{فرما}{فرلا} = ف (لا + ب م)$
 فرض کرو کہ $لا + ب م = می$

$$\text{تب } لا + ب م = \frac{فرما}{فرلا} = \frac{فری}{فرلا}$$

$$\text{پس } لا + ب م (فری) = \frac{فری}{فرلا}$$

$$\text{اور } فرلا = \frac{فری}{لا + ب م (فری)}$$

$$\text{یا } لا + ج = \sqrt{\frac{فری}{لا + ب م (فری)}}$$

مثال ۲- $\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ رکھو لا $a = y$

تب $\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

$\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

یا $y = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے اور اسی کا کامل ابتدائی ہے

لا $a = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

مثال ۳- $\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ فرض کر دو کہ $\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ کو حل کر دو

اب چونکہ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

اس لئے اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

ع۔ ضا $\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے، اس لئے اس کا کامل ابتدائی ہے

ع۔ ج ضا $\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

یا $\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

مثال ۴۔ $\text{لا} \text{ما} = \left(\frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}}\right) + (\text{لا} - \text{ما} - \text{ب}) \frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}} - \text{لا} \text{ما} =$

(ہندسہ جہات میں یہ مساوات اکثر واقع ہوتی ہے)

اس میں رکھو $\text{لا} = \text{اس}$ اور $\text{ما} = \text{ات}$

مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

$\text{اس} \text{ات} = \left(\frac{\text{اس} \text{رت}}{\text{ات} \text{رس}}\right) + (\text{س} - \text{رت} - \text{ب}) \left(\frac{\text{اس} \text{رت}}{\text{ات} \text{رس}}\right) - \text{اس} \text{ت} =$

یا $\text{اس} \left(\frac{\text{رت}}{\text{رس}}\right) + (\text{س} - \text{رت} - \text{ب}) \frac{\text{رت}}{\text{رس}} - \text{ت} =$

یعنی $\text{ت} = \left(1 + \frac{\text{رت}}{\text{رس}}\right) \text{س} - \left(1 + \frac{\text{رت}}{\text{رس}}\right) \text{ب} - \frac{\text{رت}}{\text{رس}}$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\text{ت} = \text{س} \frac{\text{رت}}{\text{رس}} - \text{ب} \frac{\text{رت}}{\text{رس}} + 1 \frac{\text{رت}}{\text{رس}}$

جو کلیروی شکل ہے، اس کا کامل ابتدائی ہے

$\text{ت} = \text{س} \text{ج} - \frac{\text{ب} \text{ج}}{1 + \text{ج}}$

یا $\text{ج} \text{لا} - \text{ما} = \frac{\text{ب} \text{ج}}{1 + \text{ج}}$

اس کا تادر حل ہے $\text{لا} \pm \text{ما} = \text{ب} \pm \text{اب}$

جو چار خطوط مستقیم ہیں۔

مثال ۵۔ $\left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right) \frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}} + \frac{\text{فر} \text{ما}}{\text{فر} \text{لا}} + \text{ق} \text{ما} =$ کو مل کرو

فرض کر دو کہ مساوات کو ہم اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ

$$\frac{م^۲}{۱۷ + ۱۹م} = مرت$$

اس طرح لا سیدھے ٹکس سے بطور ت کے تفاعل کے معلوم ہو سکتا ہے

$$اب \quad \frac{\frac{م^۲}{مرت}}{۱۷ + ۱۹م} = \frac{م^۲}{مرت}$$

$$اور \quad \frac{م^۲}{مرت} - \frac{\frac{م^۲}{مرت}}{۱ + ۱۹م} = \frac{م^۲}{مرت} \cdot \frac{۱}{۱ + ۱۹م}$$

$$پس (۱ + ۱۹م) \cdot \frac{م^۲}{مرت} = \frac{م^۲}{مرت} - \frac{م^۲}{مرت} \cdot \frac{۱}{۱ + ۱۹م}$$

$$پس مساوات معلوم اس طرح کی مساوات $\frac{م^۲}{مرت} + ق^۲م = ۰$$$

میں تحویل ہو جاتی ہے، جس کا حل ہے

$$م = ۰ \text{ جب } ق^۲ ت + بجم ق^۲ ت$$

اور جب ت کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کی جاتی ہے تو حل معلوم

ماصل ہوتا ہے۔

[اگر مثبت ہو تو

$$\frac{۱}{۱۷} = \frac{م}{۱۷ + ۱۹م} \quad مرت$$

$$\frac{۱}{۱۷} = \frac{م}{۱۷ + ۱۹م} \quad مرت$$

$$اگر منفی ہو تو \quad \frac{۱}{۱۷} = \frac{م}{۱۷ - ۱۹م} \quad مرت$$

یعنی $\frac{1}{x-1}$ جب $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ [ت]

مثال ۶۔ ذیل کی ہمزد تفرقی مساواتوں کو حل کرو (جو مستقل سرور والی خطی مساواتیں ہیں)

$$۴ = \frac{۴}{x-1} + \frac{۹}{x^2-1} + \frac{۴}{x^2-1} + ۴ = ۴$$

$$۳ = \frac{۳}{x-1} + \frac{۷}{x^2-1} + \frac{۳}{x^2-1} + ۳ = ۳$$

ہم ان مساواتوں کو اس طرح لکھ سکتے ہیں ، ع ۱ ع ۲ ع ۳ ع ۴ کی بجائے لکھا گیا ہے

$$۴ = ۴(۱ + ع) + ۴(۱ + ع) + ۴(۱ + ع) + ۴(۱ + ع)$$

$$۳ = ۳(۱ + ع) + ۳(۱ + ع) + ۳(۱ + ع) + ۳(۱ + ع)$$

ان مساواتوں پر بالترتیب ۱ ع ۲ ع ۳ ع ۴ اور ۱ ع ۲ ع ۳ ع ۴ کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ماکو سا قہ کرتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے

$$[۴(۱ + ع) + ۳(۱ + ع) - (۳(۱ + ع) + ۳(۱ + ع))] = ۱$$

$$۴ - ۳ = ۱$$

$$۱ = ۱(۱ + ع) + ۱(۱ + ع) + ۱(۱ + ع) + ۱(۱ + ع)$$

$$جس سے ملتا ہے $۱ = ۱(۱ + ع) + ۱(۱ + ع) + ۱(۱ + ع) + ۱(۱ + ع)$$$

$$۱ = ۱(۱ + ع) + ۱(۱ + ع) + ۱(۱ + ع) + ۱(۱ + ع)$$

ماکو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{۱}{x-1}$ کو اصلی مساواتوں سے سا قہ

کرتے ہیں، پہلی مساوات کو ۷ سے اور دوسری کو ۹ سے ضرب دو اور تفریق کرو، اس سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + ۲ لا + ۶ = ۷ ت - ۹ \text{ فر ت}$$

$$\text{پس } ۶ = ۷ ت - ۹ \text{ فر ت} - ۲ لا - \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$$

$$= ۷ ت - ۹ \text{ فر ت} - ۲ (۱۹ \text{ فر ت} + ۲۲ \text{ فر ت} - ۱۹ \text{ ت} - \frac{۵۲}{۹} - \frac{۲۹}{۷} \text{ فر ت})$$

$$= (۱۹ \text{ فر ت} - ۲۲ \text{ فر ت} + ۱۹ \text{ ت} - \frac{۵۲}{۹} - \frac{۲۹}{۷} \text{ فر ت})$$

$$= -۱۹ \text{ فر ت} + ۲۲ \text{ فر ت} - \frac{۵۲}{۹} - \frac{۱۹}{۳} \text{ ت} + \frac{۲۹}{۷} \text{ فر ت}$$

$$\text{پس لا} = ۱۹ \text{ فر ت} + ۲۲ \text{ فر ت} - \frac{۱۹}{۳} \text{ ت} - \frac{۵۲}{۹} - \frac{۲۹}{۷} \text{ فر ت}$$

$$۶ = -۱۹ \text{ فر ت} + ۲۲ \text{ فر ت} - \frac{۱۹}{۳} \text{ ت} - \frac{۵۲}{۹} + \frac{۲۹}{۷} \text{ فر ت}$$

[طالب علم $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$ کے استقاط کا بغور ملاحظہ کرے، اس طرح زیادہ

مستقلات کو شریک کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی]

مثال ۷۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو حل کرو

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + ۳ = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + ۱۲ = ۷$$

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} - ۵ = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + ۹ = ۶$$

یہ مساواتیں اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہیں

$$(عفا + ۱۶) لا + ۳ عفا = ما$$

$$۵ عفا لا + (عفا + ۹) ما =$$

ان مساواتوں پر بالترتیب عفا + ۹ اور ۳ عفا کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ما کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$[(عفا + ۱۶) لا + (عفا + ۹) ما + ۱۵ عفا] لا =$$

$$یا (عفا + ۴۰ عفا + ۱۴۴) لا =$$

$$یعنی (عفا + ۴) (عفا + ۳۶) لا =$$

جس سے لا = (جب ۲ ت + ب جم ۲ ت + ج جب ۶ ت + د جم ۶ ت) ما کے تفرقی سروں کو ساقط کرنے کے لئے پہلی مساوات کو تفریق کرو اور دوسری کے سہ چند کو اس سے تفریق کرو، اس طرح ملیگا

$$\frac{۳ لا}{۲ ت} + ۳۱ = \frac{۲ لا}{۲ ت} ما$$

جس سے ہمیں ما کی قیمت حاصل ہوتی ہے (بغیر نئے مستقلوں کو شریک کرنے کے)

$$ما = ۲ ب جب ۲ ت + ۲ ا جم ۲ ت + \frac{۱}{۹} د جب ۶ ت - \frac{۱}{۹} ج جم ۶ ت$$

امثلہ

$$۱- ۲ لا ما - \frac{۲ ما}{۲ لا} - (۱- لا) ما = لا$$

$$۲- ۲ ق' ما - \frac{۲ ما}{۲ لا} + \frac{۲ جب ما}{۲ جم ما} \left(\frac{۲ ما}{۲ لا} \right) + مس ما = لا$$

$$۳- (۱+ ب لا) \left(\frac{۲ ما}{۲ لا} \right) + (۱+ ب لا) \left(\frac{۲ ما}{۲ لا} \right) + ب ما = لا$$

$$۴- (۱+ لا) \left(\frac{۲ ما}{۲ لا} \right) + ۲ لا (۱+ لا) \left(\frac{۲ ما}{۲ لا} \right) + ما =$$

$$۵- (۱- لا^۱) \frac{فر۱}{فر۱} - لا \frac{فر۱}{فر۱} + ن^۱ = ۰$$

$$۶- \frac{فر۱}{فر۱} = لا - لا (فر۱ - فر۱)$$

$$۷- \frac{فر۱}{فر۱} = ۲ جب \frac{لا-۱}{۲} جم \frac{لا+۱}{۲} جم \frac{لا}{جم} جم \frac{لا}{جم}$$

۸- ذیل کی تفرقی مساواتوں کے تکلی حاصل کرو

$$(د) \frac{فر۱}{فر۱} - \frac{فر۱}{فر۱} ۳ + \frac{فر۱}{فر۱} ۹ + ۱۳ = ۰$$

$$(ب) \frac{فر۱}{فر۱} + \frac{فر۱}{فر۱} ۶ + ۹ = ۲۵ جم لا$$

$$(ج) لا \frac{فر۱}{فر۱} - لا \frac{فر۱}{فر۱} ۵ + ۱۰ = ۰ [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۹- ذیل کی ہمزاد مساواتوں کے نظام کو حل کرو

$$\frac{فر۱}{فر۱} + ۱۵ + ۳ می + ۳۰ = ۰$$

$$\frac{فر۱}{فر۱} می + ۲ + ۱۰ می + ۴ = ۰ [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۱۰- اُس منحنی کی شکل معلوم کرو جس میں رواں مماس کے میلان کا مماس محور لا کے ساتھ اُس نقطہ کے محدودوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے۔

۱۱- ایک منحنی میں کسی نقطہ پر کا انحنایہ بدلتا ہے جیسے اُس زاویہ کی جیب التمام کا مکعب جو نقطہ مذکورہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے، منحنی کی صورت معلوم کرو۔

۱۲- جس منحنی میں انحنایہ کے نصف قطر کا ظل محور ما پر منتقل ہو

اس کے لئے ثابت کرو کہ

$$(1) \quad s \infty \text{ لوک مس } \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(2) \quad \text{ما } \infty \text{ لوک قط } \frac{\pi}{4}$$

نوٹ۔ (۱) میں s قوس کا طول ہے اور π محاس کا میلان ہے محور لا کے ساتھ۔



جوابات

صفحہ (۶)

۱۔ لاس لا۔ لوک قٹ لا = ماس ما۔ لوک قٹ ما + ج

$$J = 1 - \gamma + \frac{1-\gamma}{r} + \frac{1-\gamma}{r^2} - r$$

$$1 = (1 + b + y)z + b + y + b y z - x$$

۵۔ لوک، آ + مآ = لوک لا + من لا + ج

$$z + y = \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right)z - y$$

$$ج + ۷۱۲ = ۶ (۲) \quad \frac{۷}{۲} ج = ۶ (۱) - ۹$$

$$ج + ط ۱ = ۱ \quad (۲) \quad ۱ = (ط - ج) ۱ \quad (۳)$$

10. $\frac{1}{r} + \sqrt{1-r} = 0$ کو $\frac{\sqrt{1-r}-1}{\sqrt{1-r}+1}$ اگر $1=r$ جبکہ $1=0$ ۔

صفی (۱۱)

$$1 - 2\alpha\beta = 2\alpha\beta + \beta^2$$

۱- ما نو = و + ج
۲- (و + با) = ا ج ب لا ب ج م با لا + ج و

$$۳- رطه = ا + \frac{طه^{۲۰۵}}{۲+۵} ج$$

$$۴- ۴ لا ما = ما + ج \quad ۵- لا و ستا = مس + ا + ج$$

$$۶- ما و لا = لا + ج \quad ۸- لا + ا + ما + ر لا + \frac{۱}{۲} ج = و لا$$

$$۹- \frac{۱}{لا ما} = \frac{۱}{لا ۲} + ج \quad ۱۰- \left(\frac{۱}{لا ما} \right)^{۱-۵} = \frac{۱}{۲ لا ۲-۵ ۲} + ج$$

$$۱۱- \frac{۱}{۱-۵ ما} = ۱ + ج و \quad ۱۲- لا جب ما = \frac{۱}{۲ لا ۲} + ج$$

$$۱۳- لا نو کی = \frac{۱}{۲ لا ۲} + ج \quad ۱۴- و = \frac{۱-۵ ی}{۲} ج + ۱ = \frac{۱-۵ ی}{۲} و$$

$$۱۵- \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{ر} + ج و \quad ۱۶- \frac{۱}{ر-۱} = \frac{۱}{ر-۱} + ج و$$

$$۱۸- (۱) \frac{۱}{لا} = \frac{۱}{لا ۲} + ج \quad (۲) (ا + ب) = و = لا جب ب لا - جب ما لا ج و$$

$$(۳) جب ما = و + ج \quad (۴) ف (ما) + ف (لا) + ۱ = ج و \quad (لا)$$

صفحہ (۱۷)

$$۱- \frac{۱}{۲} لوک (و + د - ۱) + لوک \frac{۱}{۵ لا ۲} + لوک \frac{۱+۵۲-۱}{۵ لا + ۱+۵۲} + لوک لا ج جہاں د = \frac{ما}{لا}$$

$$۲- \frac{۱}{۲} لوک (و + د - ۳) + لوک \frac{۹}{۳۲ لا ۲} + لوک \frac{۳۲-۱+۵۱۲}{۳۲ لا + ۱+۵۱۲} + لوک لا ج$$

صفحہ (۲۵)

$$۱- م + ۱ = ج \text{ و } لا \quad ۲- م = ۱ + \frac{لا}{۲} + لوک لا + ج$$

$$۳- م + \frac{۲}{۳} (لا + ۱) - \frac{۳}{۲} (لا + ۱) = ج$$

$$۴- لا (لا + ۱۲) = ج \text{ و } لا$$

$$۵- ۴ لا = م + ۳ لا - م - \frac{۳}{۲} لوک (۱ + ۱۲) + ج$$

$$۶- جم = \left\{ \frac{۱ - (لا - ۱) - م}{لا - ۱} \right\} لا - ۱$$

$$۷- لا = \frac{۳}{۲} لا + ع + ج + ع$$

$$م = لا + ع + ب$$

$$۸- م = \frac{۳}{۲} لا + ق + ب + ج$$

$$لا = لا + ق + ب$$

صفحہ (۲۸)

$$۱- م = ج + لا + ج ، لا + م = م$$

$$۲- م = ج + لا + ج ، لا + م = م$$

$$۳- م = ج + لا + ج ، لا + م = م$$

$$٢ - ٣ = م = ج لا + لا ج + ج' ب' ، \frac{لا}{ب} + \frac{م}{ب} = ١$$

$$٥ - ٤ = م = (١ - لا) ج - ج' ، (١ - لا) م = ١$$

$$٦ - ٥ = م = (ج - ١) لا ، ج = (١ - ج) لا + م = ١$$

صفحة (٣٠)

$$\left\{ \begin{array}{l} ١ - ٢ = م = ع' لا + ع \\ لا = \frac{لوك ع - ع + ج}{(١ - ع)^2} \end{array} \right. \quad ٢ - ٣ = م = ١ ع لا + ع$$

$$لا = ج ع + \frac{ع^2}{١ - ع}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ٣ - ٤ = م = ع' لا + ع \\ لا = (١ - ع) ع' - ع' + \frac{٣}{١} ع' + ج \\ ٤ - ٣ = م = (ع + ع') لا + \frac{١}{ع} \\ ع' لا = ١ + ١ و ع' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ٥ - ٤ = م = (ع + ع') لا + \frac{١}{١ - ع} \\ ع' لا = (١ - ع) + ١ و \frac{١}{١ - ع} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ٦ - ٥ = م = ٢ ع لا + ع \\ ع' لا = - \frac{ع}{١ + ع} + ١ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 - 1 = 5 \\ 5 = \frac{1}{1-1} \end{array} \right.$$

۸۔ قائم زائد

۹۔ مکانی جو محوروں کو مس کرتا ہے ۱۰۔ قطع زائد

۱۱- چار قرون والا در تدویر $\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}
 ۱۲-۱۱ &= (۱+ب+لا) جب لا + (ج+د+لا) جم لا + ع جب ب لا \\
 &+ ف جم ب لا + گ و - \frac{ج لا}{۲} جب ج لا + \frac{لا}{۲} جم و - \frac{ج لا}{۲} جم ج لا + \\
 &+ ص و - \frac{ج لا}{۲} جب ج لا + \frac{لا}{۲} جم ج لا
 \end{aligned}$$

صفحہ (۵۹)

$$۱- (۱) \frac{و لا}{۲} (۲) \frac{و لا}{(۲+۱)(۱+۱)} (۳) \frac{و لا}{۱۲۰} + \frac{و لا}{۱۲۰}$$

صفحہ (۶۲)

$$\frac{و لا}{۶۰} - \text{و جب لا} ، لا و لا لوک و (\frac{لا}{و})$$

صفحہ (۶۳)

$$۱- \frac{و لا}{۲} (۱+ب) - \frac{۱}{۲} جم (ب لا - سن ا ب)$$

$$\frac{و لا}{۲} - \frac{و لا}{۵۶۲} جم (۲ لا - سن ۲)$$

$$\frac{و لا}{۲} \left\{ \frac{۳}{۶۱} جب (لا - \frac{۱۱}{۳}) - \frac{۱}{۱۰۶} جب (۳ لا - سن ۳) \right\}$$

$$\frac{۱}{۲} (جب لا جنر لا - جم لا جنر لا)$$

$$۲ - \frac{1}{4} \text{ جب } ۲ \text{ لا، } \frac{1}{4} \text{ جم لا، } -\frac{3}{14} \text{ جب } ۲ \text{ لا}$$

صفحہ (۶۵)

$$\frac{قو (جب لا جم لا) قو لا ۴ (۱-قو) جب لا + (قو-۱+قو) جم لا}{(۱+قو) لا}$$

۲- جم لا جنر لا

صفحہ (۶۷)

$$۱ - \frac{لا^۲}{۲} - \frac{۳}{۲} لا + \frac{۷}{۴} لا - \frac{لا^۲}{۲} لا + \frac{لا^۲}{۴} لا$$

$$۲ - قو (\frac{لا^۲}{۴} - \frac{۵}{۱۸} لا + \frac{۱۹}{۱۰۸}) قو (\frac{لا}{۲} - \frac{لا^۲}{۴}) قو (\frac{۳}{۸} + \frac{لا}{۴})$$

$$۳ - \frac{1}{4} قو (لا جب لا جم لا) - قو (\frac{۳}{۵} لا + \frac{۳}{۵} جم لا) - (لا + \frac{۴}{۵}) جب لا$$

صفحہ (۷۲)

$$۱ - (۱) - \frac{لا جم لا}{۲} (۲) \frac{لا جب لا}{۴} (۳) \frac{لا جنر لا}{۲}$$

$$(۴) قو (\frac{لا}{۳} - \frac{لا^۲}{۴}) (۵) \frac{لا قو}{۲} (۶) \frac{لا}{۴} (جنر لا + جم لا)$$

$$(۷) \frac{لا}{۲} (۱-قو) (\frac{قو لا}{۲} + \frac{قو لا}{۲} - \frac{قو لا}{۲}) (۸) \frac{لا}{۴} جب لا جب لا$$

$$۲ - (۱) = ۱ قو + ۱ قو + ۱ قو + \frac{1}{۳} قو$$

$$(۲) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$(۳) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$+ \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۵} (۲ - ۱) = ۱$$

$$(۴) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$+ \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} (۲ - ۱) = ۱$$

$$(۵) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$(۶) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$(۷) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$+ \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} (۳ - ۱) = ۱$$

$$(۸) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$(۹) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$(۱۰) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$۳۔ رکھو ۱ + ب لا = قو ۱ = ما = ج (۱ + ب لا) + د (۱ + ب لا) م$$

$$- \frac{۱ + ب لا}{ب (ب + ۱ ب)} + \frac{۱}{ب ب}$$

جہاں م، م مساوات ب م + (۱ ب - ب) م + ب =۔
کی انہیں ہیں۔

$$۴۔ رکھو می = مس لا = ما = (۱ لا + ب) / ۱ + لا$$

$$۵۔ رکھو می = جب لا = ما = وجب (ن جب لا) + ب جم (ن جب لا)$$

$$۶۔ رکھو قو = ضا، قو = عا، (قو - قو + ۱) قو = ۱$$

$$۷۔ رکھو جب لا = ضا، جب ما = عا، (جب ما - جب لا + ۱) قو = ۱$$

$$۸۔ (۱) ما = ۱ قو + ب قو جب ۳ لا + ج قو لا جم ۳ لا$$

$$(ب) ما = (۱ + ب لا) قو + ۲ جم لا + ۳ جب لا$$

$$(ج) ما = ۱ لا جب (لوک لا) + ب لا جم (لوک لا)$$

$$۹۔ ما + ۲ = ۱ جب ۳ لا + ب جم ۲ لا + ج جب ۲ لا + د جم ۲ لا$$

$$۳ ی = ۴ - (۱ جب ۳ لا + ب جم ۳ لا) + (ج جب ۲ لا + د جم ۲ لا)$$

$$۱۰۔ ما = ۱ قو ۱۱۔ ما = ک لا + ۱ لا + ب$$

— — — — —

فہرست اصطلاحات

Canonical form	صورت آئینی
Clairaut's form	کلیر دی صورت
Commutative law	قانون مبادلہ
Complementary Function	مستم تقاضی
Complete primitive	کامل ابتدائی
Distributive law	قانون تقسیمی
Elimination	استقاط
"Exact" Differential Equations	"ٹھیک" یا حاضر مساواتیں
Homogeneous Equations	متجانس مساواتیں
Index law	قانون قوت نما
Irreversible process	غیر انقلاب پذیر عمل
Linear Equations	خطی مساواتیں
Operator	عامل
Order	رتبہ
Orthogonal trajectory	قائم مری
Particular integral	خاص تکمیلی
Rigid Dynamics	استوار اجسام کا علم حرکت
Singular Solution	نادر حل

تسمیہ

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ect}$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} ، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ وغیرہ}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}$$

$$\int f(x) dx$$

$$\int \text{ف (لا) فرلا}$$

$$D \left(= \frac{d}{dx} \right)$$

$$\text{عف} (= \frac{d}{\text{فرلا}})$$

